Processamento de Imagens usando Grafos

Prof. Alexandre Xavier Falcão

Segundo semestre de 2004

1 Introdução

Teoria dos grafos é uma área bem estabelecida que conta com diversas aplicações nas ciências e engenharias. A interpretação de uma imagem digital como um grafo, onde pixels são os nós e os arcos são definidos por relações de adjacência entre pixels, possibilita explorar algoritmos eficientes em grafo na solução de diversos problemas de processamento de imagens. Em particular, estamos interessados no projeto de operadores de processamento de imagens baseados em **conexidade**. Esses operadores possuem um papel fundamental em tarefas de filtragem não linear, segmentação e análise de imagens.

Aspectos de implementação e os conceitos básicos relacionados com imagem digital e algoritmos em grafo serão apresentados e explicados durante as aulas, à medida que forem sendo necessários. Para facilitar, trataremos apenas com imagens cinza e bidimensionais.

2 Imagem como um grafo

Considere uma **imagem** $\hat{I}$ como um par (D_I, I), onde $D_I \subset Z^2$ e $I(p)$ é o valor de cinza do pixel $p = (x_p, y_p) \in D_I$. Se $I(p) \in \{0, 1\}$, $\forall p \in D_I$, $\hat{I}$ é dita **binária**.

Uma **relação de adjacência** $A \subset D_I \times D_I$ é uma relação binária entre pixels, a qual depende de suas posições, e opcionalmente de outras propriedades locais da imagem. Se $(p, q) \in A$ (ou $q \in A(p)$), dizemos que q é **adjacente** a p. Exemplos:

- Circular: $(p, q) \in A$ se $d(p, q) \leq \rho$, onde d é distância Euclideana e ρ é um escalar,
- Retangular: $(p, q) \in A$ se $|x_q - x_p| \leq \frac{a}{2}$ e $|y_q - y_p| \leq \frac{b}{2}$, onde a e b são os comprimentos dos lados do retângulo com centro em (x_p, y_p).
- Baseada em conjunto: $(p, q) \in A$ se $q - p \in \{(-1, -1), (1, -1)\}$,
- Baseada em posição e brilho: $(p, q) \in A$ se $|x_p - x_q| + |y_p - y_q| \leq 1$ e $|I(p) - I(q)| \leq T$, onde T é um limiar de brilho.

Observe que A pode ser assimétrica e que, no caso de A ser circular, $\rho = 1$ define vizinhança-4 (i.e. os pixels compartilham uma aresta), $\rho = \sqrt{2}$ define vizinhança-8 (i.e. os pixels compartilham um vértice ou uma aresta), e $\rho = \sqrt{5}$ faz com que pixels mais distantes na imagem sejam adjacentes.

Uma relação de adjacência leva, portanto, à definição de um **grafo** $G = (D_I, A)$ para a imagem $\hat{I} = (D_I, I)$.

3 Relação de conexidade

Um **caminho** π no grafo G é uma seqüência de pixels distintos $< p_1, p_2, \ldots, p_n >$, onde $(p_i, p_{i+1}) \in A$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. O pixel p_1 é a origem $org(\pi)$ do caminho, p_n é o destino $dst(\pi)$, e o caminho π é dito **trivial** se $\pi =< p_1 >$.

Seja π um caminho que termina em um pixel p e $(p, q) \in A$, então $\pi \odot \langle p, q \rangle$ é dito o caminho resultante da concatenação de π e $\langle p, q \rangle$ com as duas instâncias de p se fundindo em uma.

Um pixel q é dito **conexo** a um pixel p se existir um caminho de p a q em $G = (D_I, A)$.

4 Componente Conexo

Um **componente conexo** na imagem $\hat{I} = (D_I, I)$ é um subconjunto de D_I, onde todos os pares (p, q) de pixels são conexos (i.e. existe um caminho de p a q e um caminho de q a p, que não necessariamente são os mesmos).

5 Partição

Uma **partição** da imagem é um conjunto de componentes conexos e disjuntos, cuja união é o conjunto D_I. Em muitas situações desejamos particionar uma imagem, identificando individualmente cada componente conexo. Por exemplo, podemos enumerar todos os componentes 1's de uma imagem binária ou definir componentes conexos em uma imagem cinza a partir de uma **relação de dissimilaridade** local entre pixels.

6 Rotulação de componentes conexos

Considere o problema de obter uma partição da imagem, onde cada componente conexo recebe um rótulo $l = 1, 2, \ldots, k$ e o número k de componentes depende da relação de adjacência A. Por exemplo, podemos dizer que dois pixels $(p, q) \in A$ se forem vizinhos-4 e $\delta(p, q) = |I(p) - I(q)| \leq T$, onde T é um limiar de dissimilaridade. Uma solução simples é aplicar a seguinte busca em largura no grafo G.

Algoritmo de rotulação de componentes conexos:

Entrada: Imagem cinza $\hat{I} = (D_I, I)$ e relação de adjacência A.
Saída: Imagem rotulada $\hat{L} = (D_I, L)$, onde $L(p) = 0$ inicialmente $\forall p \in D_I$.
Auxiliares: FIFO Q e variável inteira $l = 1$.

1. Para todo pixel $p \in D_I$, tal que $L(p) = 0$, faça
2. $\quad$ $L(p) \leftarrow l$ e insira p em Q.
3. $\quad$ Enquanto $Q \neq \emptyset$ faça
4. $\quad\quad$ Remova p de Q.
5. $\quad\quad$ Para todo $q \in A(p)$, tal que $L(q) = 0$, faça
6. $\quad\quad\quad$ $L(q) \leftarrow l$ e insira q em Q.
7. $\quad$ $l \leftarrow l + 1$.

Observe que se os valores de cinza variam linearmente formando uma rampa entre componentes que desejamos separar, o algoritmo pode falhar nesta separação. Uma alternativa para reduzir o problema é modificar $\delta(p,q)$ para $|I(s) - I(q)| \leq T$, onde s é o primeiro pixel escolhido no componente. Neste caso, devemos acrescentar $s \leftarrow p$ na linha 2 do algoritmo. Um aspecto ainda negativo é a dependência do algoritmo com relação à escolha dos representantes. Este problema pode ser reduzido se a dissimilaridade levar em conta o valor médio de brilho no componente. Isto requer modificarmos $\delta(p,q)$ para $|\frac{S}{N} - I(q)| \leq T$, onde S é o valor de brilho acumulado no conjunto atual de pixels e N é o número de pixels deste conjunto. Neste caso, teremos $S \leftarrow I(p)$ e $N \leftarrow 1$ na linha 2, e $S \leftarrow S + I(q)$ e $N \leftarrow N + 1$ na linha 6.

7 Exercício

Implemente o algoritmo acima para as seguintes relações de adjacência:

- $(p,q) \in A$ se $d(p,q) \leq \rho$ e $\delta(p,q) = |I(p) - I(q)| \leq T$, onde d é distância Euclideana, ρ e T são constantes.
- $(p,q) \in A$ se $d(p,q) \leq \rho$ e $\delta(p,q) = 1 - \exp^{-\frac{|I(p)-I(q)|}{2\sigma^2}} \leq T$, onde σ é uma constante.

Compare os resultados para diferentes valores das constantes, escolha a melhor opção, incorpore as modificações com relação ao representante e ao valor médio, e compare os resultados finais.