Operações Matemáticas e Transformações Radiométricas

Alexandre Xavier Falcão

Instituto de Computação - UNICAMP

afalcao@ic.unicamp.br

Operações Matemáticas

Sejam $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{J} = (D_J, J)$ duas imagens cinzas de **mesmo domínio**, $D_I = D_J$.

Operações Matemáticas

Sejam $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{J} = (D_J, J)$ duas imagens cinzas de **mesmo domínio**, $D_I = D_J$.

- Uma operação $\odot$ (**lógica ou aritmética**) entre $\hat{I}$ e $\hat{J}$ gera uma imagem $\hat{K} = (D_K, K)$, $D_K = D_I = D_J$, onde $K(p) = I(p) \odot J(p)$ para todo $p \in D_K$.

Operações Matemáticas

Sejam $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{J} = (D_J, J)$ duas imagens cinzas de **mesmo domínio**, $D_I = D_J$.

- Uma operação $\odot$ (**lógica ou aritmética**) entre $\hat{I}$ e $\hat{J}$ gera uma imagem $\hat{K} = (D_K, K)$, $D_K = D_I = D_J$, onde $K(p) = I(p) \odot J(p)$ para todo $p \in D_K$.
- A operação $\odot$ pode ser *MINIMO* (*and* lógico), *MAXIMO* (*or* lógico), $+$, -, $/$, *, etc.

Sejam $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{J} = (D_J, J)$ duas imagens cinzas de **mesmo domínio**, $D_I = D_J$.

- Uma operação $\odot$ (**lógica ou aritmética**) entre $\hat{I}$ e $\hat{J}$ gera uma imagem $\hat{K} = (D_K, K)$, $D_K = D_I = D_J$, onde $K(p) = I(p) \odot J(p)$ para todo $p \in D_K$.
- A operação $\odot$ pode ser *MINIMO* (*and* lógico), *MAXIMO* (*or* lógico), $+$, -, / , *, etc.

2	4	2
9	2	4
2	2	4

(a)

4	0	0
1	0	2
0	0	0

(b)

2	0	0
1	0	2
0	0	0

(c)

(a) $\hat{I}$ (b) $\hat{J}$ (c) $MINIMO(\hat{I}, \hat{J})$.

Operações Matemáticas

- Uma operação **aritmética** $\odot$ entre um escalar s e $\hat{I}$ gera uma imagem $\hat{K} = (D_K, K)$, $D_K = D_I$, tal que $K(p) = I(p) \odot s$ para todo $p \in D_K$.

Operações Matemáticas

- Uma operação **aritmética** $\odot$ entre um escalar s e $\hat{I}$ gera uma imagem $\hat{K} = (D_K, K)$, $D_K = D_I$, tal que $K(p) = I(p) \odot s$ para todo $p \in D_K$.
- A operação $\odot$ pode ser $+, -, /, *, \hat{}$. Por exemplo, em $\hat{K} = \hat{I}^{1/2}$, $K(p) = \sqrt{I(p)}$.

Operações Matemáticas

- Um operador matemático $\mathbf{O}$ sobre uma imagem $\hat{I}$ gera uma imagem $\hat{K} = (D_K, K)$, $D_K = D_I$, tal que $K(p) = \mathbf{O}(I(p))$ para todo $p \in D_K$.

Operações Matemáticas

- Um operador matemático $\mathbf{O}$ sobre uma imagem $\hat{I}$ gera uma imagem $\hat{K} = (D_K, K)$, $D_K = D_I$, tal que $K(p) = \mathbf{O}(I(p))$ para todo $p \in D_K$.
- O operador $\mathbf{O}$ pode ser o valor absoluto, logaritmo, exponencial, seno, etc. Por exemplo, em $\hat{K} = |\hat{I} - \hat{J}|$, $K(p) = |I(p) - J(p)|$.

Operações Matemáticas

- Um operador matemático $\mathbf{O}$ sobre uma imagem $\hat{I}$ gera uma imagem $\hat{K} = (D_K, K)$, $D_K = D_I$, tal que $K(p) = \mathbf{O}(I(p))$ para todo $p \in D_K$.
- O operador $\mathbf{O}$ pode ser o valor absoluto, logaritmo, exponencial, seno, etc. Por exemplo, em $\hat{K} = |\hat{I} - \hat{J}|$, $K(p) = |I(p) - J(p)|$.

Desta forma podemos ter expressões lógicas e aritméticas envolvendo várias imagens e escalares.

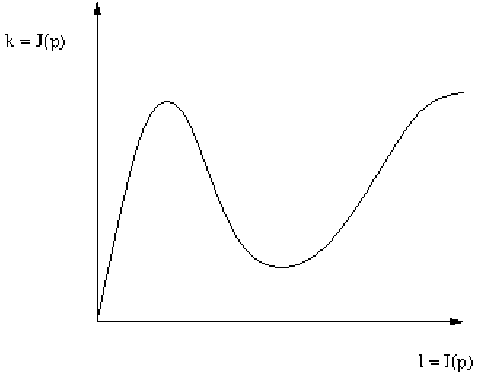
Transformações entre espaços de cores

No caso de imagens coloridas $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$ em um dado espaço de cor, este espaço pode ser transformado em outro por multiplicação matricial e outras operações matemáticas.

$$\begin{bmatrix} K_1(p) \\ K_2(p) \\ K_3(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.169 & -0.331 & 0.500 \\ 0.500 & -0.419 & -0.081 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \\ I_3(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{bmatrix}$$

Neste exemplo, o operador $\hat{K} = \mathbf{O}(\hat{I})$ transforma a imagem $\hat{I}$ do espaço RGB para uma imagem $\hat{K} = (D_K, \vec{K})$, $D_K = D_I$, no espaço YC_bC_r, onde K_1 é luminância Y, K_2 é crominância C_b e K_3 é crominância C_r.

Uma transformação radiométrica é um mapeamento aplicado às intensidades dos pixels, independente da localização desses pixels na imagem, visando alterações de brilho e contraste.



Transformação Radiométrica

- Seja $\hat{I} = (D_I, I)$ uma imagem cinza, uma transformação radiométrica gera outra imagem cinza $\hat{J} = (D_J, J)$, onde $D_J = D_I$ e $J(p) = T(I(p))$ para todo $p \in D_I$.
- Suponha que $l = I(p)$ e $k = J(p)$. Então, l e k são variáveis aleatórias, tais que $k = T(l)$, cujos valores variam com $p \in D_I$.
- Neste sentido, o histograma normalizado $0 \leq h(l) \leq 1$ representa a distribuição de probabilidades da variável aleatória l.

Transformação linear

Sejam $[l_1, l_2]$, $l_1 \leq l_2$, e $[k_1, k_2]$ dois intervalos de cinza no conjunto de valores de I e J. A transformação (stretching) linear é dada por:

$$k = \begin{cases} k_1, & \text{se } I < l_1, \\ \frac{(k_2-k_1)}{(l_2-l_1)}(I - l_1) + k_1, & \text{se } l_1 \leq I < l_2, \\ k_2, & \text{se } I \geq l_2. \end{cases}$$

Transformação linear

Sejam $[l_1, l_2]$, $l_1 \leq l_2$, e $[k_1, k_2]$ dois intervalos de cinza no conjunto de valores de I e J. A transformação (stretching) linear é dada por:

$$k = \begin{cases} k_1, & \text{se } I < l_1, \\ \frac{(k_2 - k_1)}{(l_2 - l_1)}(I - l_1) + k_1, & \text{se } l_1 \leq I < l_2, \\ k_2, & \text{se } I \geq l_2. \end{cases}$$

- Normalização em $[0, H]$ (e.g., $H = 255$): $k_2 = H$, $k_1 = 0$, $l_1 = I_{\min}$, e $l_2 = I_{\max}$, onde $I_{\min}$ e $I_{\max}$ são os valores mínimo e máximo de $\hat{I}$.

Transformação linear

Sejam $[l_1, l_2]$, $l_1 \leq l_2$, e $[k_1, k_2]$ dois intervalos de cinza no conjunto de valores de I e J. A transformação (stretching) linear é dada por:

$$k = \begin{cases} k_1, & \text{se } I < l_1, \\ \frac{(k_2 - k_1)}{(l_2 - l_1)}(I - l_1) + k_1, & \text{se } l_1 \leq I < l_2, \\ k_2, & \text{se } I \geq l_2. \end{cases}$$

- Normalização em $[0, H]$ (e.g., $H = 255$): $k_2 = H$, $k_1 = 0$, $l_1 = I_{\min}$, e $l_2 = I_{\max}$, onde $I_{\min}$ e $I_{\max}$ são os valores mínimo e máximo de $\hat{I}$.
- Negativo: $k_2 = I_{\min}$, $k_1 = I_{\max}$, $l_1 = I_{\min}$, e $l_2 = I_{\max}$.

Transformação linear

Sejam $[l_1, l_2]$, $l_1 \leq l_2$, e $[k_1, k_2]$ dois intervalos de cinza no conjunto de valores de I e J. A transformação (stretching) linear é dada por:

$$k = \begin{cases} k_1, & \text{se } I < l_1, \\ \frac{(k_2 - k_1)}{(l_2 - l_1)}(I - l_1) + k_1, & \text{se } l_1 \leq I < l_2, \\ k_2, & \text{se } I \geq l_2. \end{cases}$$

- Normalização em $[0, H]$ (e.g., $H = 255$): $k_2 = H$, $k_1 = 0$, $l_1 = I_{\min}$, e $l_2 = I_{\max}$, onde $I_{\min}$ e $I_{\max}$ são os valores mínimo e máximo de $\hat{I}$.
- Negativo: $k_2 = I_{\min}$, $k_1 = I_{\max}$, $l_1 = I_{\min}$, e $l_2 = I_{\max}$.
- Largura & Nível (width & level): $k_2 = H$, $k_1 = 0$, e $l_1 < l_2$, onde o nível $\frac{l_1 + l_2}{2}$ altera o brilho e a largura $l_2 - l_1$ altera o contraste.

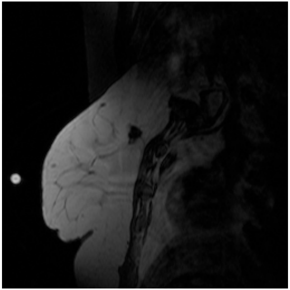
Transformação linear

Sejam $[l_1, l_2]$, $l_1 \leq l_2$, e $[k_1, k_2]$ dois intervalos de cinza no conjunto de valores de I e J. A transformação (stretching) linear é dada por:

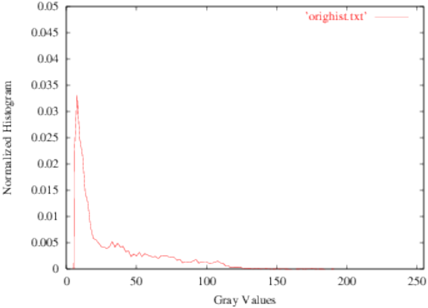
$$k = \begin{cases} k_1, & \text{se } I < l_1, \\ \frac{(k_2 - k_1)}{(l_2 - l_1)}(I - l_1) + k_1, & \text{se } l_1 \leq I < l_2, \\ k_2, & \text{se } I \geq l_2. \end{cases}$$

- Normalização em $[0, H]$ (e.g., $H = 255$): $k_2 = H$, $k_1 = 0$, $l_1 = I_{\min}$, e $l_2 = I_{\max}$, onde $I_{\min}$ e $I_{\max}$ são os valores mínimo e máximo de $\hat{I}$.
- Negativo: $k_2 = I_{\min}$, $k_1 = I_{\max}$, $l_1 = I_{\min}$, e $l_2 = I_{\max}$.
- Largura & Nível (width & level): $k_2 = H$, $k_1 = 0$, e $l_1 < l_2$, onde o nível $\frac{l_1 + l_2}{2}$ altera o brilho e a largura $l_2 - l_1$ altera o contraste.
- Limiarização (thresholding): $k_2 = H$, $k_1 = 0$ e $l_1 = l_2$.

Imagem escura com baixo contraste

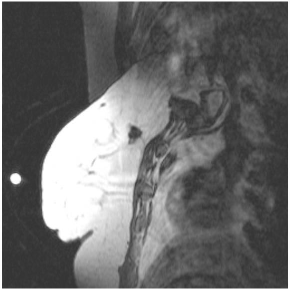


(a) Carcinoma de mama em RM

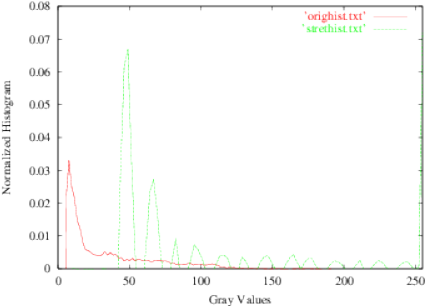


(b) Seu histograma

Após transformação linear



(a) Imagem transformada



(b) Histogramas antes e depois

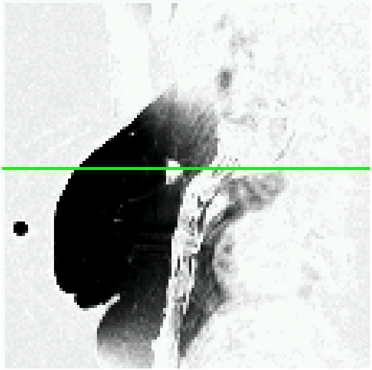
Transformação exponencial

A transformação exponencial pode ser definida por:

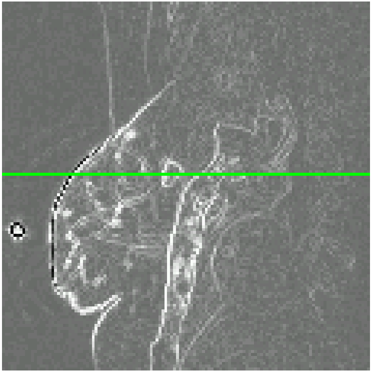
- $k = I_{\max} \exp(\frac{I - I_{\min}}{I_{\max} - I_{\min}}) - I_{\max}$ e
- $k = H \exp(\frac{-(I-\mu)^2}{2\sigma^2})$.

O primeiro caso aumenta o contraste no intervalo $[I_{\min}, I_{\max}]$ e o segundo aumenta o contraste em relação a um valor μ (e.g., μ pode ser o brilho médio de um objeto na imagem).

Após transformação Gaussiana



(a) Original transformada



(b) Imagem de bordas transformada

Transformação logaritmica

A transformação logaritmica reduz a dinâmica da imagem (intervalo de brilho), sendo muito usada para visualizar a magnitude da transformada de Fourier.

$$J(p) = H \log(1 + \left|\vec{I}(p)\right|),$$

onde $\vec{I} = \{I_1, I_2\}$ contém a parte real I_1 e a imaginária I_2 do espectro.

- Transformações radiométricas devem preservar a informação de matiz da imagem colorida. Neste caso, as transformações acima podem ser aplicadas na imagem de brilho (ou de saturação) usando algum espaço descorrelacionado: HSV, Luv, Lab, $YCbCr$.

Transformações radiométricas para imagens coloridas

- Transformações radiométricas devem preservar a informação de matiz da imagem colorida. Neste caso, as transformações acima podem ser aplicadas na imagem de brilho (ou de saturação) usando algum espaço descorrelacionado: HSV, Luv, Lab, $YCbCr$.
- Por exemplo: Converte-se a imagem de RGB para $YCbCr$, aplica-se a transformação radiométrica em Y, e volta a imagem transformada de $YCbCr$ para RGB.

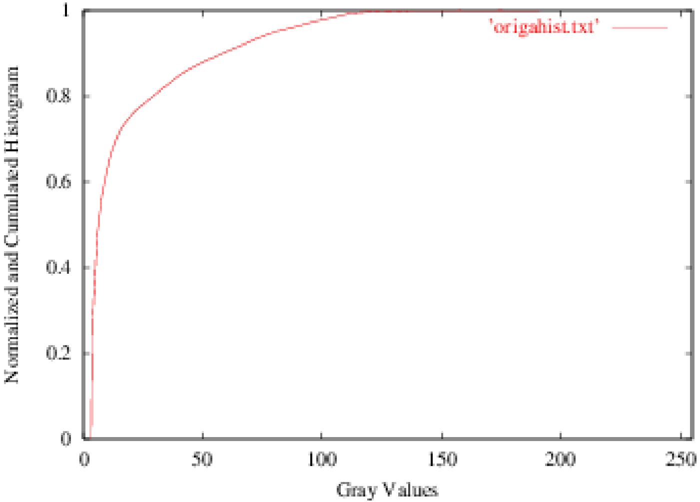
Histograma acumulado

Sendo $h(I)$ o histograma normalizado de uma imagem cinza $\hat{I} = (D_I, I)$, o histograma acumulado de $\hat{I}$ é uma função $h_a(I)$ que produz o valor acumulado do histograma $h(I)$ (área abaixo da curva) para cada nível de cinza $I_{\min} \leq I \leq I_{\max}$ (vamos assumir que $0 \leq I_{\min}$).

$$h_a(I) = \sum_{I'=0}^{I} h(I').$$

Note que $h_a(I_{\max}) = 1$. Este conceito pode ser explorado para equalização da imagem.

Histograma acumulado



Histograma acumulado da imagem de mama.

Equalização

Considere uma imagem $\hat{I}$ cinza e normalizada em $0 \leq I \leq 1$. A equalização $k = T(I)$ visa gerar uma imagem $\hat{J} = (D_J, J)$ com intensidades $0 \leq k \leq 1$ e histograma uniforme (i.e., todas as intensidades equiprováveis), por aplicação direta do histograma acumulado.

$$k = h_a(I)$$

Considere uma imagem $\hat{I}$ cinza e normalizada em $0 \leq I \leq 1$. A equalização $k = T(I)$ visa gerar uma imagem $\hat{J} = (D_J, J)$ com intensidades $0 \leq k \leq 1$ e histograma uniforme (i.e., todas as intensidades equiprováveis), por aplicação direta do histograma acumulado.

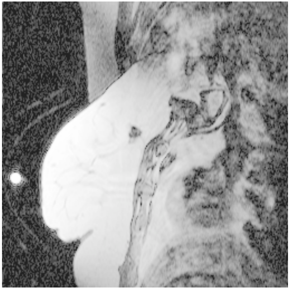
$$k = h_a(I)$$

Esta transformação tem como propriedades ser:

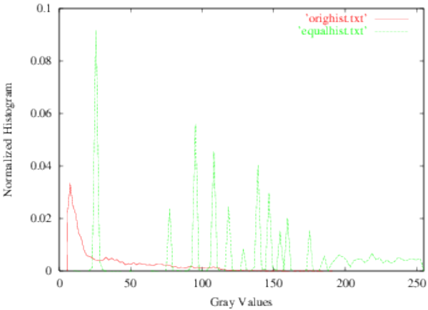
- bijetora e monotonicamente crescente em $[0, 1]$, e
- limitada, $0 \leq T(I) \leq 1$, para $0 \leq I \leq 1$.

Após equalização, os valores $0 \leq k \leq 1$ podem ser multiplicados por H para gerar valores inteiros de brilho.

Após equalização



(a) Original equalizada



(b) Histogramas antes e depois

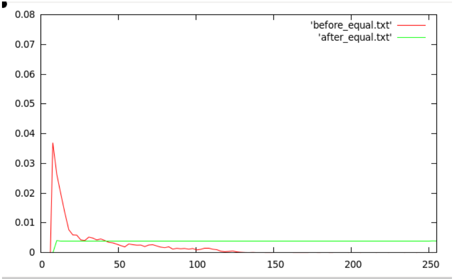
Equalização por ordenação

Uma forma de garantir que o histograma de $\hat{J}$ seja mesmo uniforme é equalizar a imagem seguindo os passos abaixo.

1. Ordene os pixels da imagem $\hat{I}$ por ordem crescente de brilho.
2. Divida a sequência ordenada de pixels em $H+1$ intervalos, $k = 0, 1, \ldots, H$, com um mesmo número de pixels cada.
3. Gere a imagem $\hat{J}$, onde $J(p)$ é o intervalo k no qual o pixel p tem seu brilho $I(p)$ mapeado.

Após equalização por ordenação

(a) Original equalizada



(b) Histogramas antes e depois

Casamento de histogramas

Sejam $\hat{I}_1 = (D_{I_1}, I_1)$ e $\hat{I}_2 = (D_{I_2}, I_2)$ duas imagens cinza. Suponha que desejamos fazer com que o histograma de $\hat{I}_1$ fique parecido com o histograma de $\hat{I}_2$.

Casamento de histogramas

Sejam $\hat{I}_1 = (D_{I_1}, I_1)$ e $\hat{I}_2 = (D_{I_2}, I_2)$ duas imagens cinza. Suponha que desejamos fazer com que o histograma de $\hat{I}_1$ fique parecido com o histograma de $\hat{I}_2$.

- Sejam T_1 e T_2 as transformações de equalização para $\hat{I}_1$ e $\hat{I}_2$. Após equalização, podemos assumir que os histogramas das imagens resultantes são iguais e uniformes.

Casamento de histogramas

Sejam $\hat{I}_1 = (D_{I_1}, I_1)$ e $\hat{I}_2 = (D_{I_2}, I_2)$ duas imagens cinza. Suponha que desejamos fazer com que o histograma de $\hat{I}_1$ fique parecido com o histograma de $\hat{I}_2$.

- Sejam T_1 e T_2 as transformações de equalização para $\hat{I}_1$ e $\hat{I}_2$. Após equalização, podemos assumir que os histogramas das imagens resultantes são iguais e uniformes.
- A inversa T_2^{-1} aplicada à equalização T_1, deve gerar uma imagem $\hat{J} = (D_{I_1}, J)$ com histograma parecido com o de $\hat{I}_2$.

$$J(p) \quad = \quad T_2^{-1}(T_1(I_1(p)))$$

Casamento de histogramas

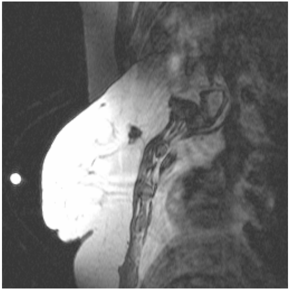
Sejam $\hat{I}_1 = (D_{I_1}, I_1)$ e $\hat{I}_2 = (D_{I_2}, I_2)$ duas imagens cinza. Suponha que desejamos fazer com que o histograma de $\hat{I}_1$ fique parecido com o histograma de $\hat{I}_2$.

- Sejam T_1 e T_2 as transformações de equalização para $\hat{I}_1$ e $\hat{I}_2$. Após equalização, podemos assumir que os histogramas das imagens resultantes são iguais e uniformes.
- A inversa T_2^{-1} aplicada à equalização T_1, deve gerar uma imagem $\hat{J} = (D_{I_1}, J)$ com histograma parecido com o de $\hat{I}_2$.

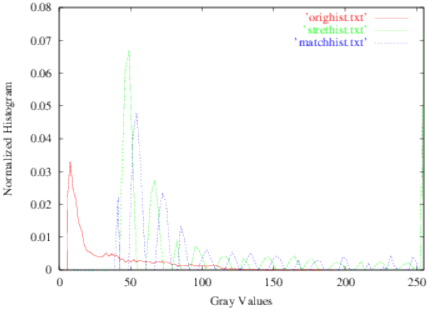
$$J(p) \quad = \quad T_2^{-1}(T_1(I_1(p)))$$

O casamento entre imagens coloridas requer conversão de RGB para $YCbCr$, o casamento entre os componentes de brilho, e a volta de $YCbCr$ para RGB.

Casamento de histogramas: original e linearmente transformada



(a) Após casamento



(b) Histogramas antes e depois

Exercícios

Considerando imagens cinzas, escreva os algoritmos em linguagem de alto nível para:

1. Transformação linear.
2. Equalização pelo histograma acumulado.
3. Casamento de histogramas.