

Transformada Discreta de Fourier

Alexandre Xavier Falcão

Instituto de Computação - UNICAMP

afalcao@ic.unicamp.br

- Sejam $I(x, y)$ os valores dos pixels $p = (x, y)$ de uma imagem cinza $\hat{I} = (D_I, I)$ com dimensões $|D_I| = M \times N$ pixels.

- Sejam $I(x, y)$ os valores dos pixels $p = (x, y)$ de uma imagem cinza $\hat{I} = (D_I, I)$ com dimensões $|D_I| = M \times N$ pixels.
- Cada valor $I(x, y)$, $x = 0, 1, \dots, M - 1$ e $y = 0, 1, \dots, N - 1$, pode ser expresso como uma soma ponderada de exponenciais complexas nas frequências digitais $\Omega_x = 2\pi u$ (na horizontal) e $\Omega_y = 2\pi v$ (na vertical), em radianos/unidade de comprimento, para $u = 0, 1, \dots, M - 1$ e $v = 0, 1, \dots, N - 1$.

$$I(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{v=0}^{N-1} \sum_{u=0}^{M-1} \vec{I}(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}, \text{ onde}$$
$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta).$$

- Os pesos $\vec{I}(u, v) = I_{Re}(u, v) + jI_{Im}(u, v)$ são números complexos, denominados **coeficientes de frequência**.

- Os pesos $\vec{T}(u, v) = I_{Re}(u, v) + jI_{Im}(u, v)$ são números complexos, denominados **coeficientes de frequência**.
- Por sua vez, cada coeficiente de frequência $\vec{T}(u, v)$, $u = 0, 1, \dots, M - 1$ e $v = 0, 1, \dots, N - 1$, pode ser expresso como uma soma ponderada de exponenciais complexas para $x = 0, 1, \dots, M - 1$ e $y = 0, 1, \dots, N - 1$.

$$\vec{T}(u, v) = \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{M-1} I(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}.$$

- Os pesos $\vec{T}(u, v) = I_{Re}(u, v) + jI_{Im}(u, v)$ são números complexos, denominados **coeficientes de frequência**.
- Por sua vez, cada coeficiente de frequência $\vec{T}(u, v)$, $u = 0, 1, \dots, M - 1$ e $v = 0, 1, \dots, N - 1$, pode ser expresso como uma soma ponderada de exponenciais complexas para $x = 0, 1, \dots, M - 1$ e $y = 0, 1, \dots, N - 1$.

$$\vec{T}(u, v) = \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{M-1} I(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}.$$

- A equação acima é denominada **Transformada Discreta de Fourier** (TDF) e a equação anterior é a transformada inversa.

- A TDF tem uma série de aplicações nas ciências e engenharias, e o curso abordará seu uso no projeto de filtros no domínio da frequência.

- A TDF tem uma série de aplicações nas ciências e engenharias, e o curso abordará seu uso no projeto de filtros no domínio da frequência.
- Esta aula iniciará derivando a TDF de imagens a partir da transformada de Fourier de sinais contínuos $f(x)$ para $x \in \mathfrak{R}$.

- A TDF tem uma série de aplicações nas ciências e engenharias, e o curso abordará seu uso no projeto de filtros no domínio da frequência.
- Esta aula iniciará derivando a TDF de imagens a partir da transformada de Fourier de sinais contínuos $f(x)$ para $x \in \mathfrak{R}$.
- Depois iremos estudar os exemplos com imagens e propriedades da TDF.

Transformada de Fourier de um sinal contínuo

- Seja $f(x)$ uma função real e contínua, sua transformada de Fourier $\vec{F}(u) = F_{Re}(u) + jF_{Im}(u)$ e a inversa são dadas por

$$\vec{F}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(u)e^{j2\pi ux} du.$$

Transformada de Fourier de um sinal contínuo

- Seja $f(x)$ uma função real e contínua, sua transformada de Fourier $\vec{F}(u) = F_{Re}(u) + jF_{Im}(u)$ e a inversa são dadas por

$$\vec{F}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(u)e^{j2\pi ux} du.$$

- Note que, mesmo considerando apenas funções $f(x)$ reais, a transformada $\vec{F}(u)$ é normalmente complexa, exceto quando $f(x)$ é uma função par (i.e. $f(x) = f(-x)$).

Exemplos úteis

Alguns exemplos úteis para derivar transformadas de sinais mais complexos são:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq x_o, \text{ e} \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases} \quad F(u) = 2x_o Sa(2\pi x_o u)$$

$$f(x) = 2u_o Sa(2\pi u_o x) \quad F(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } |u| \leq u_o, \text{ e} \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\Delta_x) \quad F(u) = \frac{1}{\Delta_x} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{m}{\Delta_x})$$

onde $Sa(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$.

$$f(x) = \cos(2\pi u_o x) \quad F(u) = \frac{1}{2} [\delta(u - u_o) + \delta(u + u_o)]$$

$$\frac{d^{(n)}f}{dx}(x) \quad (2\pi u j)^n \vec{F}(u)$$

$$f(x) = \sin(2\pi u_o x) \quad \vec{F}(u) = \frac{j}{2} [\delta(u + u_o) - \delta(u - u_o)]$$

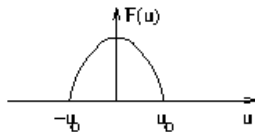
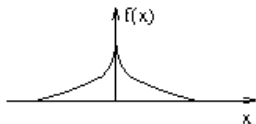
$$h(x) = f(x) * g(x) \quad \vec{H}(u) = \vec{F}(u) \vec{G}(u)$$

$$h(x) = f(x)g(x) \quad \vec{H}(u) = \vec{F}(u) * \vec{G}(u)$$

onde $g(x)$ é uma função real e contínua e os dois últimos exemplos são chamados **teoremas da convolução no espaço e na frequência**, respectivamente.

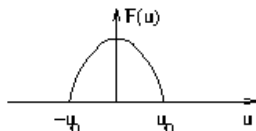
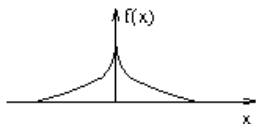
Amostragem do sinal contínuo

- Seja $f(x)$ um sinal real, contínuo, par e limitado em faixa de frequência $[-u_o, u_o]$ (i.e., ilimitado no espaço).



Amostragem do sinal contínuo

- Seja $f(x)$ um sinal real, contínuo, par e limitado em faixa de frequência $[-u_o, u_o]$ (i.e., ilimitado no espaço).

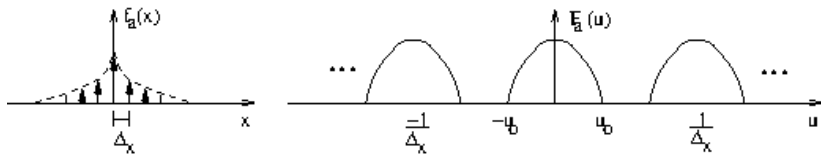


- Se amostrarmos $f(x)$ a intervalos Δ_x , pelas equações anteriores teremos:

$$f_a(x) = f(x) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\Delta_x) \quad F_a(u) = \frac{1}{\Delta_x} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(u - \frac{m}{\Delta_x}).$$

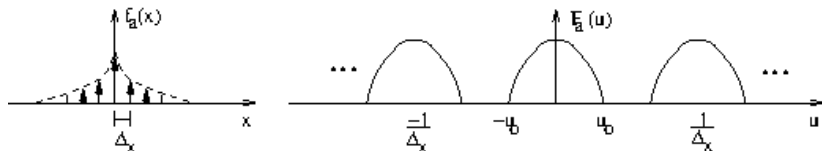
Amostragem do sinal contínuo

Isto é, o espectro de frequência $F_a(u)$ do sinal amostrado é periódico com período $\frac{1}{\Delta_x}$.



Amostragem do sinal contínuo

Isto é, o espectro de frequência $F_a(u)$ do sinal amostrado é periódico com período $\frac{1}{\Delta_x}$.



- O sinal original pode ser recuperado por $F_a(u)G(u)$, onde

$$G(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } |u| \leq u_0, \text{ e} \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases}$$

- Isto equivale à convolução $f_a(x) * 2u_o Sa(2\pi u_o x)$, resultando na **fórmula da interpolação**.

$$f(x) = 2\Delta_x u_o \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m\Delta_x) Sa(2\pi u_o(x - m\Delta_x)).$$

Amostragem do sinal contínuo

- Isto equivale à convolução $f_a(x) * 2u_o Sa(2\pi u_o x)$, resultando na **fórmula da interpolação**.

$$f(x) = 2\Delta_x u_o \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m\Delta_x) Sa(2\pi u_o (x - m\Delta_x)).$$

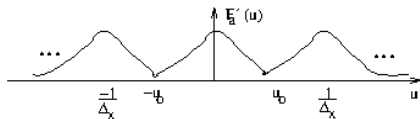
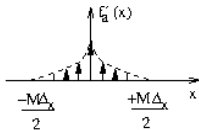
- No entanto, a recuperação do sinal original só é possível se $\frac{1}{\Delta_x} \geq 2u_o$ (Teorema de Nyquist).

Amostragem do sinal contínuo

Observe que é computacionalmente inviável trabalhar com $f_a(x)$ ilimitada. Sua limitação $f'_a(x) = f_a(x)g(x)$, para

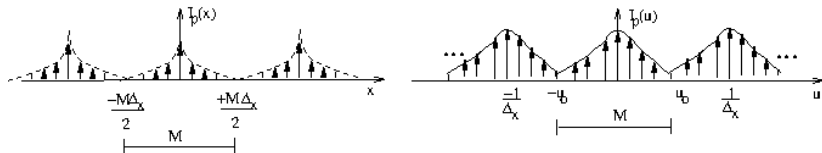
$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq \frac{M\Delta_x}{2}, \text{ e} \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases}$$

equivale à convolução de $F_a(u)$ com $G(u) = M\Delta_x Sa(\pi M\Delta_x u)$, gerando $F'_a(u)$ contínuo e periódico.



Amostragem do sinal contínuo

Também é inviável trabalhar com um espectro contínuo. O espectro $F'_a(u)$ é então amostrado a intervalos $\Delta_u = \frac{1}{M\Delta_x}$, gerando $I_p(u)$. Sua transformada inversa será então um sinal discreto e periódico $I_p(x)$, com período $M\Delta_x$.



Portanto, o par TDF e sua inversa

$$\vec{I}(u, v) = \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{M-1} I(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

$$I(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{v=0}^{N-1} \sum_{u=0}^{M-1} \vec{I}(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

são sinais 2D periódicos, mas estamos interessados apenas em $M \times N$ amostras de um período.

TDF de uma imagem 2D

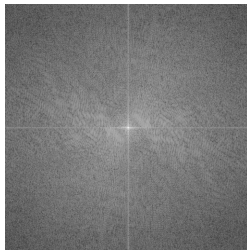
- A imagem e o espectro iniciam em $(0, 0)$ e vão até $(M - 1, N - 1)$, mas a visualização da magnitude/fase do espectro é centrada em $(M/2, N/2)$.

TDF de uma imagem 2D

- A imagem e o espectro iniciam em $(0, 0)$ e vão até $(M - 1, N - 1)$, mas a visualização da magnitude/fase do espectro é centrada em $(M/2, N/2)$.
- Isto requer uma translação de $(-M/2, -N/2)$, e no caso da magnitude, temos ainda uma transformação logaritmica.



Imagem



Magnitude da TDF

- As frequências digitais $\Omega_x = 2\pi u$ e $\Omega_y = 2\pi v$ em radianos por unidade de comprimento são também representadas como $\omega_x = \Omega_x \Delta_x$ e $\omega_y = \Omega_y \Delta_y$ em radianos.

- As frequências digitais $\Omega_x = 2\pi u$ e $\Omega_y = 2\pi v$ em radianos por unidade de comprimento são também representadas como $\omega_x = \Omega_x \Delta_x$ e $\omega_y = \Omega_y \Delta_y$ em radianos.
- Neste caso, $u = \frac{1}{\Delta_x}$ e $v = \frac{1}{\Delta_y}$ equivalem à $\omega_x = \omega_y = 2\pi$.

TDF de uma imagem 2D

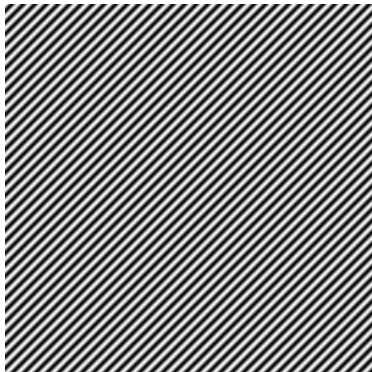
- As frequências digitais $\Omega_x = 2\pi u$ e $\Omega_y = 2\pi v$ em radianos por unidade de comprimento são também representadas como $\omega_x = \Omega_x \Delta_x$ e $\omega_y = \Omega_y \Delta_y$ em radianos.
- Neste caso, $u = \frac{1}{\Delta_x}$ e $v = \frac{1}{\Delta_y}$ equivalem à $\omega_x = \omega_y = 2\pi$.
- Estando a magnitude centrada na imagem $|\vec{I}(u, v)|$, com $M \times N$ pixels, temos que $\frac{M}{2} = \frac{N}{2} = \pi$ (i.e., o espectro varia de $-\pi$ a π).

TDF de uma imagem 2D

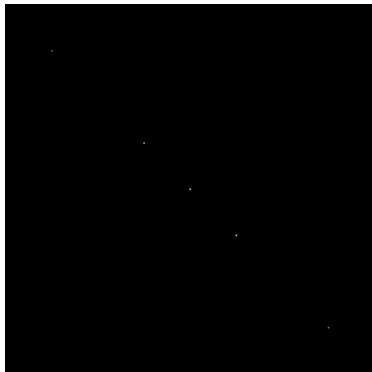
Se criarmos $I(x, y) = 127 \cos(2\pi u_o x + 2\pi v_o y) + 127$ com $M \times N$ pixels, teremos

$$I(u, v) = \frac{127}{2} [\delta(u - u_o, v - v_o) + \delta(u + u_o, v + v_o)] + 127\delta(u, v).$$

Para $M = N = 256$ e $u_o = v_o = \frac{32}{256}$, temos:



Imagem



Magnitude da TDF

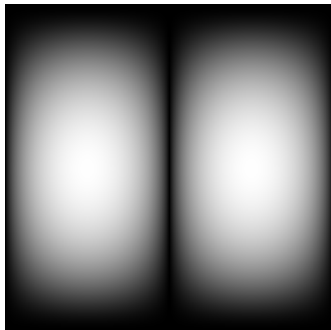
Algumas propriedades da TDF

- Interpolação do espectro, adicionando zeros no domínio espacial.
- Rotação.
- Distributividade e escalamento.
- Translação.
- Teorema da convolução.
- Teorema da correlação.
- Separabilidade.

Interpolação do espectro

O espectro de uma imagem pequena pode ser visualizado com resolução maior se acrescentarmos zeros até obtermos o número desejado de amostras. Por exemplo, a magnitude do filtro de Sobel X.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



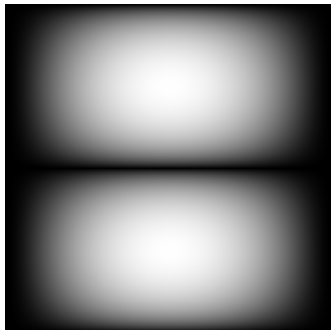
Rotação

Expressando $I(x, y)$ e $\vec{I}(u, v)$ em coordenadas polares $I(r, \theta)$, $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, e $\vec{I}(r', \phi)$, $u = r' \cos(\phi)$ e $v = r' \sin(\phi)$, temos que

$$I(r, \theta + \alpha) \leftrightarrow \vec{I}(r', \phi + \alpha)$$

Por exemplo, a magnitude do filtro de Sobel Y.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} aI(x, y) + bJ(x, y) &\leftrightarrow a\vec{I}(u, v) + b\vec{J}(u, v) \\ I(ax, by) &\leftrightarrow \vec{I}\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \end{aligned}$$

A subamostragem $I(ax, by)$ é obtida para $a > 1$ e $b > 1$, e a superamostragem para $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$. A primeira aproxima as repetições do espectro em frequência (podendo ocasionar aliasing), enquanto a segunda afasta essas repetições.

A translação é redefinida como deslocamento circular de $I(x, y)$ periódica. O mesmo sendo válido para o domínio da frequência.

$$\begin{aligned} I(x + m, y + n) &\leftrightarrow W_M^{mu} W_N^{nv} \vec{I}(u, v) \\ W_M^{-mu} W_N^{-nv} I(x, y) &\leftrightarrow \vec{I}(u + m, v + n) \end{aligned}$$

para $W_M = e^{-j2\pi/M}$ e $W_N = e^{-j2\pi/N}$.

Teorema da convolução

A convolução discreta é redefinida como convolução circular (ou periódica),

$$I(x, y) * J(x, y) = \left[\sum_{x'=0}^{M-1} \sum_{y'=0}^{N-1} I(x', y') J(x - x', x - y') \right]$$
$$\vec{I}(u, v) * \vec{J}(u, v) = \left[\sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} \vec{I}(u', v') \vec{J}(u - u', v - v') \right].$$

Observe que o resultado da convolução circular é essencialmente o mesmo da convolução discreta para $M \geq M_1 + M_2 - 1$ e $N \geq N_1 + N_2 - 1$. O teorema da convolução fica, portanto,

$$I(x, y) * J(x, y) \leftrightarrow \vec{I}(u, v) \vec{J}(u, v)$$
$$I(x, y) J(x, y) \leftrightarrow \frac{1}{(MN)^2} \vec{I}(u, v) * \vec{J}(u, v)$$

Teorema da correlação

A correlação discreta é redefinida como correlação circular (ou periódica),

$$I(x, y) \odot J(x, y) = \left[\sum_{x'=0}^{M-1} \sum_{y'=0}^{N-1} I(x', y') J(x + x', y + y') \right]$$
$$\vec{I}(u, v) \odot \vec{J}(u, v) = \left[\sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} \vec{I}^*(u', v') \vec{J}(u + u', v + v') \right],$$

onde $\vec{I}^*(u', v')$ é o conjugado de $\vec{I}(u', v')$. Observe que o resultado da correlação circular é essencialmente o mesmo da correlação discreta para $M \geq M_1 + M_2 - 1$ e $N \geq N_1 + N_2 - 1$. O teorema da correlação fica, portanto,

$$I(x, y) \odot J(x, y) \leftrightarrow \vec{I}^*(u, v) \vec{J}(u, v)$$
$$\vec{I}(x, y) J(x, y) \leftrightarrow \frac{1}{(MN)^2} \vec{I}^*(u, v) \odot \vec{J}(u, v)$$

Separabilidade

A transformada $\vec{T}(u, v)$ de $I(x, y)$ pode ser separada em duas transformadas 1D, uma na horizontal e outra na vertical. O mesmo vale para a inversa.

$$\sum_{x=0}^{M-1} \left[\sum_{y=0}^{N-1} I(x, y) W_N^{vy} \right] W_M^{ux} = \sum_{x=0}^{M-1} \vec{T}(x, v) W_M^{ux}$$
$$\frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} \vec{T}_p(u, v) W_N^{-vy} \right] W_M^{-ux} = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} I_p(u, y) W_M^{-ux}$$