

# Filtros Lineares

Alexandre Xavier Falcão

Instituto de Computação - UNICAMP

afalcao@ic.unicamp.br

- Dada uma imagem cinza  $\hat{I} = (D_I, I)$  e um kernel  $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ , a convolução  $\hat{J} = (D_J, J) = \hat{I} * \hat{K}$  é uma **filtragem linear**.

- Dada uma imagem cinza  $\hat{I} = (D_I, I)$  e um kernel  $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ , a convolução  $\hat{J} = (D_J, J) = \hat{I} * \hat{K}$  é uma **filtragem linear**.
- Para simplificar, podemos assumir que  $D_J = D_I$  e que o **filtro**  $\hat{K}$  já está refletido em relação à origem de  $\mathcal{A}$ .

- Dada uma imagem cinza  $\hat{I} = (D_I, I)$  e um kernel  $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ , a convolução  $\hat{J} = (D_J, J) = \hat{I} * \hat{K}$  é uma **filtragem linear**.
- Para simplificar, podemos assumir que  $D_J = D_I$  e que o **filtro**  $\hat{K}$  já está refletido em relação à origem de  $\mathcal{A}$ .
- Nos próximos slides, a escolha do filtro passa a ser essencialmente a escolha da relação de adjacência  $\mathcal{A}$  e dos pesos em  $K$ .

- Dada uma imagem cinza  $\hat{I} = (D_I, I)$  e um kernel  $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ , a convolução  $\hat{J} = (D_J, J) = \hat{I} * \hat{K}$  é uma **filtragem linear**.
- Para simplificar, podemos assumir que  $D_J = D_I$  e que o **filtro**  $\hat{K}$  já está refletido em relação à origem de  $\mathcal{A}$ .
- Nos próximos slides, a escolha do filtro passa a ser essencialmente a escolha da relação de adjacência  $\mathcal{A}$  e dos pesos em  $K$ .
- A origem da relação de adjacência  $\mathcal{A}$  é normalmente no centro da imagem de pesos.

# Filtros de suavização

Filtros de suavização (*blurring*) reduzem ruído de alta frequência, mas borram as bordas da imagem.

Filtros de suavização (*blurring*) reduzem ruído de alta frequência, mas borram as bordas da imagem.

- Filtro Média

$$K = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

Filtros de suavização (*blurring*) reduzem ruído de alta frequência, mas borram as bordas da imagem.

- Filtro Média

$$K = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

- Filtro Gaussiano

$$K = \frac{1}{16} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Os exemplos anteriores foram de filtros 3x3 pixels. Considerando uma adjacência circular,  $q \in \mathcal{A}(p)$  se  $\|q - p\|^2 \leq r^2$  (ou esférica em 3D), de raio  $r$ , os coeficientes do filtro Gaussiano podem ser calculados por:

$$K(q - p) = \frac{\exp\left(-\frac{\|q-p\|^2}{2\sigma^2}\right)}{\sum_{\forall s \in \mathcal{A}(p)} K(s - p)}$$

onde  $\sigma = r/3$  e  $p$  é o centro do disco (origem de  $\mathcal{A}$ ).

Filtragem Gaussiana:



original



filtrada

# Filtros de realce de bordas

Filtros de realce de bordas destacam bordas da imagem em uma dada direção, mas podem amplificar o ruído.

- Realce por filtros de Sobel

$$K_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad K_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Filtros de realce de bordas

Filtros de realce de bordas destacam bordas da imagem em uma dada direção, mas podem amplificar o ruído.

- Realce por filtros de Sobel

$$K_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad K_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $K_x$  e  $K_y$  realçam bordas nas direções  $x$  (bordas verticais) e  $y$  (bordas horizontais), respectivamente.

# Filtros de realce de bordas

Filtros de realce de bordas destacam bordas da imagem em uma dada direção, mas podem amplificar o ruído.

- Realce por filtros de Sobel

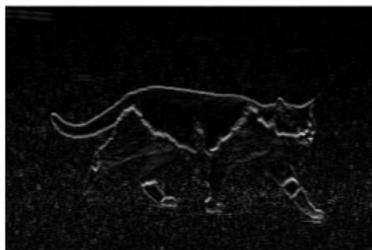
$$K_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad K_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $K_x$  e  $K_y$  realçam bordas nas direções  $x$  (bordas verticais) e  $y$  (bordas horizontais), respectivamente.
- Sendo  $\hat{G}_x = \hat{I} * \hat{K}_x$  e  $\hat{G}_y = \hat{I} * \hat{K}_y$ ,  $\vec{G}(p) = G_x(p)\vec{i} + G_y(p)\vec{j}$  é dito **vetor gradiente** em  $p$ , o qual aponta para a direção de maior crescimento de brilho na imagem  $\hat{I}$  em torno de  $p$ . Sua magnitude  $|\vec{G}(p)|$  é muito usada.

Realce de bordas



Sobel em x



Sobel em y



Magnitude

A magnitude de um vetor gradiente realça bordas em todas as direções. De um modo mais geral:

# Filtros de realce de bordas

A magnitude de um vetor gradiente realça bordas em todas as direções. De um modo mais geral:

Considerando uma adjacência circular,  $q \in \mathcal{A}(p)$  se  $\|q - p\|^2 \leq r^2$  (ou esférica em 3D) de raio  $r$ , o vetor gradiente  $\vec{G}(p)$  pode ser calculado por

A magnitude de um vetor gradiente realça bordas em todas as direções. De um modo mais geral:

Considerando uma adjacência circular,  $q \in \mathcal{A}(p)$  se  $\|q - p\|^2 \leq r^2$  (ou esférica em 3D) de raio  $r$ , o vetor gradiente  $\vec{G}(p)$  pode ser calculado por

$$\vec{G}(p) = \sum_{\forall q \in \mathcal{A}(p)} [I(q) - I(p)] \vec{p}\vec{q},$$

onde  $\vec{p}\vec{q} = \left( \frac{x_q - x_p}{\sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}}, \frac{y_q - y_p}{\sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}} \right)$

O filtro de Sobel em uma dada direção  $x$ , por exemplo, equivale a duas operações:

- Uma suavização na direção  $y$ , calculada por filtragem linear

$$\text{com } K = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ e}$$

- Uma derivada da imagem  $\hat{I}$  em  $x$ ,  $\hat{I}_x = (D_I, \frac{dI}{dx})$ , calculada por filtragem linear com  $K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

# Filtros de realce de bordas

Em 3D, as fatias do filtro ao longo de  $x$  seriam:

$$K_{x,1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$K_{x,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{x,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

\* Similarmente ao longo de  $y$  e  $z$ .

O realce de bordas em 8 direções pode ser ainda representado pelos seguintes filtros.

- Norte

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Nordeste

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

O realce de bordas em 8 direções pode ser ainda representado pelos seguintes filtros.

- Leste

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sudeste

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O realce de bordas em 8 direções pode ser ainda representado pelos seguintes filtros.

- Sul

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sudoeste

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O realce de bordas em 8 direções pode ser ainda representado pelos seguintes filtros.

- Oeste

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Noroeste

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Os filtros anteriores realçam bordas com deslocamento em relação à posição real delas. Os **filtros Laplacianos** equivalem à derivada segunda da imagem (e.g.,  $\frac{d^2I}{dx^2} + \frac{d^2I}{dy^2}$ ), localizando as bordas entre valores negativos e positivos (*zero crossings*). Exemplos de *kernels*:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

No entanto, a imagem é normalmente suavizada antes do Laplaciano, para reduzir a amplificação de ruído.

O **Laplaciano da Gaussiana (LoG)** é usado no caso geral de uma adjacência  $\mathcal{A} : q \in \mathcal{A}(p)$  se  $\|q - p\|^2 \leq r^2$  (circular ou esférica).

$$K(q - p) = -\frac{1}{\pi\sigma^4} \left[ 1 - \frac{\|q - p\|^2}{2\sigma^2} \right] \exp\left(\frac{-\|q - p\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

onde  $\sigma = r/3$  e  $p$  é o centro (origem) de  $\mathcal{A}$ .

Outra forma de realce de bordas, bastante popular, é a **Diferença de Gaussianas (DoG)** (chapéu mexicano). Explorando a propriedade  $\hat{I} * \hat{K}_1 - \hat{I} * \hat{K}_2 = \hat{I} * (\hat{K}_1 - \hat{K}_2)$ , o *kernel*  $\hat{K} = (\hat{K}_1 - \hat{K}_2)$  pode ser definido como:

- $\mathcal{A} : q \in \mathcal{A}(p)$  se  $\|q - p\|^2 \leq r^2$ .
- $K(q - p)$ ,  $q \in \mathcal{A}(p)$ ,  $p$  sendo a origem de  $\mathcal{A}$ :

$$K(q - p) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} \exp\left(\frac{-\|q - p\|^2}{2\sigma_1^2}\right) - \frac{1}{2\pi\sigma_2^2} \exp\left(\frac{-\|q - p\|^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

onde  $\sigma_2 > \sigma_1$  e  $\sigma_2 = r/3$ .

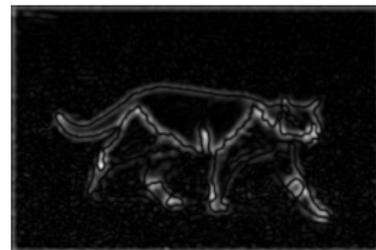
## Diferença de Gaussianas



Original



Magnitude de Sobel



DoG

A soma da imagem com o realce de bordas causa uma melhor definição do contraste na imagem (**sharpness**).

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Outros exemplos são:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 17 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$