Relações de Adjacência, Kernel, Correlação, e Convolução

Alexandre Xavier Falcão

Instituto de Computação - UNICAMP

afalcao@ic.unicamp.br

Introdução

- Dada uma imagem $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$, muitos operadores levam em conta as propriedades dos spels em $\vec{I}$ e de seus adjacentes, de acordo com uma *relação de adjacência*.

- Dada uma imagem $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$, muitos operadores levam em conta as propriedades dos spels em $\vec{I}$ e de seus adjacentes, de acordo com uma *relação de adjacência*.
- Alguns operadores também consideram pesos para cada adjacente, e os pares adjacentes e pesos formam um *kernel*.

Introdução

- Dada uma imagem $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$, muitos operadores levam em conta as propriedades dos spels em $\vec{I}$ e de seus adjacentes, de acordo com uma *relação de adjacência*.
- Alguns operadores também consideram pesos para cada adjacente, e os pares adjacentes e pesos formam um *kernel*.
- Operações de *correlação* e *convolução*, portanto, envolvem a imagem $\hat{I}$ e um *kernel*.

Relação de Adjacência

Dada uma imagem $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$, uma relação de adjacência $\mathcal{A} \subset D_I \times D_I$ é uma relação binária entre spels p e q, a qual leva em conta algum **critério de distância** entre eles. Por exemplo:

Relação de Adjacência

Dada uma imagem $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$, uma relação de adjacência $\mathcal{A} \subset D_I \times D_I$ é uma relação binária entre spels p e q, a qual leva em conta algum **critério de distância** entre eles. Por exemplo:

- Dois spels, p e q são adjacentes, i.e. $(p, q) \in \mathcal{A}$, se a distância entre eles no espaço imagem for menor ou igual a um raio $r \geq 1$, i.e. $\|q - p\| \leq r$.

Relação de Adjacência

Dada uma imagem $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$, uma relação de adjacência $\mathcal{A} \subset D_I \times D_I$ é uma relação binária entre spels p e q, a qual leva em conta algum **critério de distância** entre eles. Por exemplo:

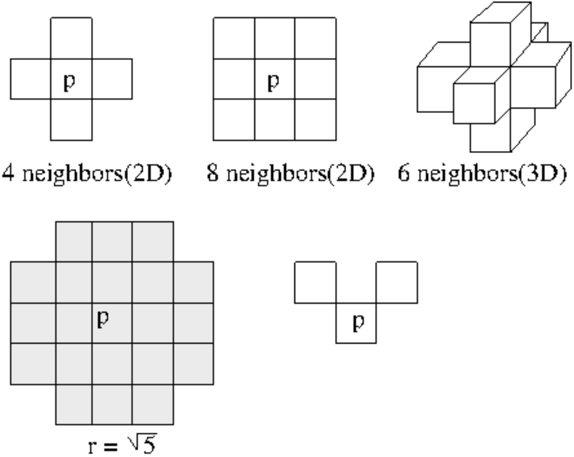
- Dois spels, p e q são adjacentes, i.e. $(p, q) \in \mathcal{A}$, se a distância entre eles no espaço imagem for menor ou igual a um raio $r \geq 1$, i.e. $\|q - p\| \leq r$.
- Para $D_I \subset Z^2$, se $r = 1$, p e q compartilham uma aresta (**vizinhança-4**), se $r = \sqrt{2}$, eles compartilham pelo menos um vértice (**vizinhança-8**).

Relação de Adjacência

Dada uma imagem $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$, uma relação de adjacência $\mathcal{A} \subset D_I \times D_I$ é uma relação binária entre spels p e q, a qual leva em conta algum **critério de distância** entre eles. Por exemplo:

- Dois spels, p e q são adjacentes, i.e. $(p, q) \in \mathcal{A}$, se a distância entre eles no espaço imagem for menor ou igual a um raio $r \geq 1$, i.e. $\|q - p\| \leq r$.
- Para $D_I \subset Z^2$, se $r = 1$, p e q compartilham uma aresta (**vizinhança-4**), se $r = \sqrt{2}$, eles compartilham pelo menos um vértice (**vizinhança-8**).
- Para $D_I \subset Z^3$, se $r = 1$, p e q compartilham uma face (**vizinhança-6**), se $r = \sqrt{2}$, eles compartilham pelo menos uma aresta (**vizinhança-18**), e se $r = \sqrt{3}$, eles compartilham pelo menos um vértice (**vizinhança-26**).

Relação de Adjacência



Relação de Adjacência

- A relação de adjacência $\mathcal{A} : (p, q) \in \mathcal{A}$ se $\|q - p\| \leq r$, para $r \geq 1$, é reflexiva, simétrica e não-transitiva.

Relação de Adjacência

- A relação de adjacência $\mathcal{A} : (p, q) \in \mathcal{A}$ se $\|q - p\| \leq r$, para $r \geq 1$, é reflexiva, simétrica e não-transitiva.
- No entanto, uma relação de adjacência pode ser irreflexiva e/ou assimétrica. Por exemplo: $(p, q) \in \mathcal{A}$ se $(q - p) \in \{(1, -1), (-1, -1)\}$.

Relação de Adjacência

- A relação de adjacência $\mathcal{A}$: $(p, q) \in \mathcal{A}$ se $\|q - p\| \leq r$, para $r \geq 1$, é reflexiva, simétrica e não-transitiva.
- No entanto, uma relação de adjacência pode ser irreflexiva e/ou assimétrica. Por exemplo: $(p, q) \in \mathcal{A}$ se $(q - p) \in \{(1, -1), (-1, -1)\}$.
- Portanto, dizemos que q pertence ao conjunto de adjacentes de p, i.e. $q \in \mathcal{A}(p)$, se q for adjacente a p de acordo com $\mathcal{A}$.

Relação de Adjacência

- As relações de adjacência até o momento são invariantes à translação e este é o caso mais comum.

Relação de Adjacência

- As relações de adjacência até o momento são invariantes à translação e este é o caso mais comum.
- No entanto, se $\mathcal{A}$ também levar em conta os valores dos spels na imagem, a relação deixa de ser invariante à translação. Por exemplo: $(p, q) \in \mathcal{A}$ se $\|q - p\| \leq r \geq 1$ e $I(q) = I(p)$.

Relação de Adjacência

- As relações de adjacência até o momento são invariantes à translação e este é o caso mais comum.
- No entanto, se $\mathcal{A}$ também levar em conta os valores dos spels na imagem, a relação deixa de ser invariante à translação. Por exemplo: $(p, q) \in \mathcal{A}$ se $\|q - p\| \leq r \geq 1$ e $I(q) = I(p)$.
- Podemos ainda definir a relação de adjacência usando apenas distâncias no espaço de parâmetros. Por exemplo: $(p, q) \in \mathcal{A}$ se $\|\vec{I}(q) - \vec{I}(p)\| \leq r \geq 0$.

Relação de Adjacência

Nesta aula, estaremos interessados em relações de adjacência **invariantes à translação**.

Relação de Adjacência

Nesta aula, estaremos interessados em relações de adjacência **invariantes à translação**.

- Estas relações podem ser armazenadas em um vetor de deslocamentos. Por exemplo, para $D_I \subset Z^2$, dizemos que $q \in \mathcal{A}(p)$ se

$$q - p \quad \in \quad \{(dx_1, dy_1), (dx_2, dy_2), \ldots, (dx_d, dy_d)\},$$

onde $d = |\mathcal{A}(p)|$. Estes deslocamentos serão os mesmos independente de p.

Relação de Adjacência

Nesta aula, estaremos interessados em relações de adjacência **invariantes à translação**.

- Estas relações podem ser armazenadas em um vetor de deslocamentos. Por exemplo, para $D_I \subset Z^2$, dizemos que $q \in \mathcal{A}(p)$ se

$$q - p \in \{(dx_1, dy_1), (dx_2, dy_2), \ldots, (dx_d, dy_d)\},$$

  onde $d = |\mathcal{A}(p)|$. Estes deslocamentos serão os mesmos independente de p.
- Notem ainda que os adjacentes q são alcançados a partir de qualquer p por

$$(x_q, y_q) = (x_p, y_p) + (dx_i, dy_i), i = 1, 2, \ldots, d,$$

  onde $q = (x_q, y_q)$ e $p = (x_p, y_p)$.

Kernel

Um *kernel* $\hat{K}$ é uma imagem (móvel) de pesos definidos sobre os deslocamentos de uma relação de adjacência $\mathcal{A}$.

Kernel

Um *kernel* $\hat{K}$ é uma imagem (móvel) de pesos definidos sobre os deslocamentos de uma relação de adjacência $\mathcal{A}$.

- $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ consiste do mapeamento de pesos $K(q-p) \in \{w_1, w_2, \ldots, w_d\}$ associados a cada deslocamento em $\mathcal{A}(p)$, respectivamente.

Kernel

Um *kernel* $\hat{K}$ é uma imagem (móvel) de pesos definidos sobre os deslocamentos de uma relação de adjacência $\mathcal{A}$.

- $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ consiste do mapeamento de pesos $K(q - p) \in \{w_1, w_2, \ldots, w_d\}$ associados a cada deslocamento em $\mathcal{A}(p)$, respectivamente.
- Ao considerar cada spel $p \in D_I$, estamos essencialmente deslocando uma imagem $\hat{K}$ sobre a imagem $\hat{I}$.

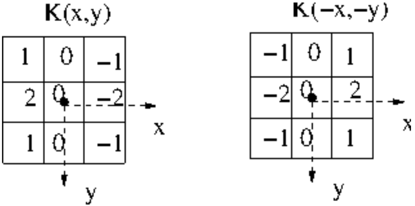
Um *kernel* $\hat{K}$ é uma imagem (móvel) de pesos definidos sobre os deslocamentos de uma relação de adjacência $\mathcal{A}$.

- $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ consiste do mapeamento de pesos $K(q-p) \in \{w_1, w_2, \ldots, w_d\}$ associados a cada deslocamento em $\mathcal{A}(p)$, respectivamente.
- Ao considerar cada spel $p \in D_I$, estamos essencialmente deslocando uma imagem $\hat{K}$ sobre a imagem $\hat{I}$.
- A correlação e a convolução calculam a soma dos produtos entre o valor em $\hat{I}$ de cada spel adjacente e o seu peso em $\hat{K}$, para cada deslocamento possível.

Kernel

- A relação de adjacência $\mathcal{A}$ em $\hat{K}$ tem sempre uma origem $(0, 0)$ referente ao spel p.

- A relação de adjacência $\mathcal{A}$ em $\hat{K}$ tem sempre uma origem $(0, 0)$ referente ao spel p.
- A diferença entre correlação e convolução está na reflexão $\hat{K}'$ de $\hat{K}$ em relação à origem.



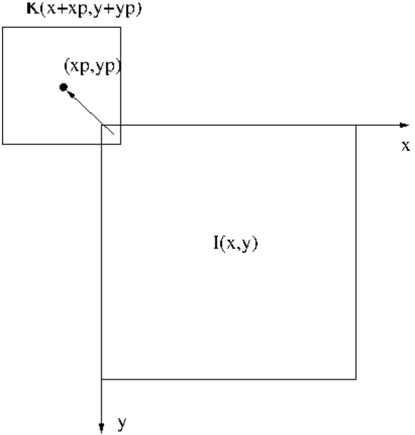
Correlação

A correlação $\hat{I} \odot \hat{K}$ entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ gera uma imagem $\hat{J} = (D_J, J)$ tal que para todo $p \in D_I$:

$$J(p) \quad = \quad \sum_{\forall q \in \mathcal{A}(p)} I(q)K(q-p) = \sum_{i=1}^{d} I(q_i)w_i$$

onde q_i, $i = 1, 2, \ldots, d$ são os adjacentes de p em $\mathcal{A}(p)$.

A rigor, a imagem $\hat{K}$ desloca-se deste o infinito negativo de cada eixo até o infinito positivo de cada eixo, valendo para todo $p \in D_J$ tal que $D_I \subset D_J$, mas na prática forçamos que $D_J = D_I$.



Em 2D, a correlação entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (D_K, K)$ geraria a imagem $\hat{J} = (D_J, J)$, onde para todo $p \in D_J$:

$$J(x_p, y_p) \;=\; \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x,y)K(x + x_p, y + y_p)$$

onde (x_p, y_p) seriam os deslocamentos em relação a origem $(0, 0)$.

Correlação

Em 2D, a correlação entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (D_K, K)$ geraria a imagem $\hat{J} = (D_J, J)$, onde para todo $p \in D_J$:

$$J(x_p, y_p) \quad = \quad \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x, y) K(x + x_p, y + y_p)$$

onde (x_p, y_p) seriam os deslocamentos em relação a origem $(0, 0)$.

- $J(x_p, y_p)$ só existe na intersecção entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (D_K, K)$.

Correlação

Em 2D, a correlação entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (D_K, K)$ geraria a imagem $\hat{J} = (D_J, J)$, onde para todo $p \in D_J$:

$$J(x_p, y_p) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x,y)K(x + x_p, y + y_p)$$

onde (x_p, y_p) seriam os deslocamentos em relação a origem $(0,0)$.

- $J(x_p, y_p)$ só existe na intersecção entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (D_K, K)$.
- Se D_I tiver $n_x \times n_y$ pixels e D_K tiver $m_x \times m_y$ pixels, então D_J terá $(n_x + m_x - 1) \times (n_y + m_y - 1)$ pixels.

Convolução

A convolução $\hat{I} * \hat{K}$ entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ requer a reflexão $\hat{K}'$ de $\hat{K}$:

$$
\begin{aligned}
\hat{K}' &= (\mathcal{A}', K) \\
\mathcal{A}' &= \{(-dx_1, -dy_1), (-dx_2, -dy_2), \ldots, (-dx_d, -dy_d)\} \\
K(p - q) &\in \{w_1, w_2, \ldots, w_d\}
\end{aligned}
$$

Essa convolução $\hat{J} = (D_J, J)$ tal que para todo $p \in D_I$:

$$J(p) \;=\; \sum_{\forall q \in \mathcal{A}'(p)} I(q)K(p-q) = \sum_{i=1}^{d} I(q_i)w_i$$

onde q_i, $i = 1, 2, \ldots, d$ são os adjacentes de p em $\mathcal{A}'(p)$. Também forçamos $D_J = D_I$.

Em 2D, a convolução entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (D_K, K)$ geraria a imagem $\hat{J} = (D_J, J)$, onde para todo $p \in D_J$:

$$J(x_p, y_p) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x, y) K(-x + x_p, -y + y_p)$$

onde (x_p, y_p) seriam os deslocamentos em relação a origem $(0, 0)$.

Convolução

Em 2D, a convolução entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (D_K, K)$ geraria a imagem $\hat{J} = (D_J, J)$, onde para todo $p \in D_J$:

$$J(x_p, y_p) \quad = \quad \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x, y) K(-x + x_p, -y + y_p)$$

onde (x_p, y_p) seriam os deslocamentos em relação a origem $(0, 0)$.

- $J(x_p, y_p)$ só existe na intersecção entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (D_K, K)$.

Convolução

Em 2D, a convolução entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (D_K, K)$ geraria a imagem $\hat{J} = (D_J, J)$, onde para todo $p \in D_J$:

$$J(x_p, y_p) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x,y)K(-x + x_p, -y + y_p)$$

onde (x_p, y_p) seriam os deslocamentos em relação a origem $(0,0)$.

- $J(x_p, y_p)$ só existe na intersecção entre $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (D_K, K)$.
- Se D_I tiver $n_x \times n_y$ pixels e D_K tiver $m_x \times m_y$ pixels, então D_J terá $(n_x + m_x - 1) \times (n_y + m_y - 1)$ pixels.

Algumas propriedades

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

Algumas propriedades

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

- Comutatividade: $\hat{I} * \hat{K} = \hat{K} * \hat{I}$.

Algumas propriedades

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

- Comutatividade: $\hat{I} * \hat{K} = \hat{K} * \hat{I}$.
- Associatividade: $\hat{I} * (\hat{J} * \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) * \hat{K}$.

Algumas propriedades

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

- Comutatividade: $\hat{I} * \hat{K} = \hat{K} * \hat{I}$.
- Associatividade: $\hat{I} * (\hat{J} * \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) * \hat{K}$.
- Distributividade: $\hat{I} * (\hat{J} + \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) + (\hat{I} * \hat{K})$.

Algumas propriedades

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

- Comutatividade: $\hat{I} * \hat{K} = \hat{K} * \hat{I}$.
- Associatividade: $\hat{I} * (\hat{J} * \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) * \hat{K}$.
- Distributividade: $\hat{I} * (\hat{J} + \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) + (\hat{I} * \hat{K})$.
- Associatividade com escalar: $a(\hat{I} * \hat{K}) = (a\hat{I}) * \hat{K}$.

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

- Comutatividade: $\hat{I} * \hat{K} = \hat{K} * \hat{I}$.
- Associatividade: $\hat{I} * (\hat{J} * \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) * \hat{K}$.
- Distributividade: $\hat{I} * (\hat{J} + \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) + (\hat{I} * \hat{K})$.
- Associatividade com escalar: $a(\hat{I} * \hat{K}) = (a\hat{I}) * \hat{K}$.
- Identidade multiplicativa: $\hat{I} * \hat{\delta} = \hat{I}$, onde $\hat{\delta} = (D_\delta, \delta)$ é a imagem do Delta de Dirac.

Algoritmo de Convolução

Entrada: $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$.
Saída: $\hat{J} = (D_J, J)$, $D_I \subset D_J$.

1. Calcula $\hat{K}' = (\mathcal{A}', K)$.
2. Para todo $p \in D_J$, faça
3. $\quad J(p) \leftarrow 0$.
4. $\quad$ Para todo $q \in \mathcal{A}'(p)$, tal que $q \in D_I$, faça
5. $\quad\quad J(p) \leftarrow J(p) + I(q)K(p-q)$.