

# Filtragem no Domínio da Frequência

Alexandre Xavier Falcão

Instituto de Computação - UNICAMP

afalcao@ic.unicamp.br

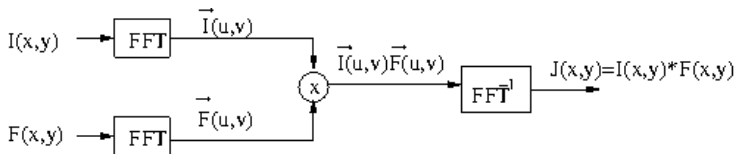
- Sejam  $\hat{I} = (D_I, I)$  uma imagem cinza e  $\hat{F} = (D_F, F)$  a imagem de um filtro linear.

- Sejam  $\hat{I} = (D_I, I)$  uma imagem cinza e  $\hat{F} = (D_F, F)$  a imagem de um filtro linear.
- Aprendemos que a convolução  $I(x, y) * F(x, y)$  resulta uma imagem filtrada  $J(x, y)$ , i.e.,  $\hat{J} = (D_J, J)$ .

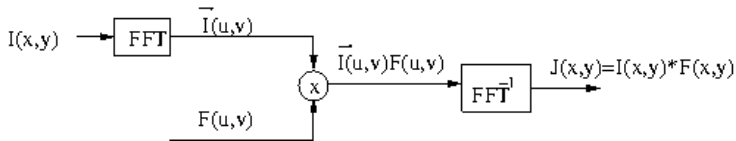


- Para filtros de maior domínio, a filtragem em frequência é mais eficiente, usando o algoritmo da *Fast Fourier Transform* (FFT).

- Para filtros de maior domínio, a filtragem em frequência é mais eficiente, usando o algoritmo da *Fast Fourier Transform* (FFT).
- Este algoritmo explora a propriedade de separabilidade da transformada discreta de Fourier para um custo computacional  $O(n \log n)$ .



Podemos ainda projetar os filtros no domínio da frequência e de modo que sejam reais e simétricos, o que evitará mudanças de fase na imagem filtrada.



Nesta aula vamos aprender:

Nesta aula vamos aprender:

- Filtros que deixam passar as baixas frequências da imagem (**passa-baixas**).



Nesta aula vamos aprender:

- Filtros que deixam passar as baixas frequências da imagem (**passa-baixas**).
- Filtros que deixam passar as altas frequências da imagem (**passa-altas**).

Nesta aula vamos aprender:

- Filtros que deixam passar as baixas frequências da imagem (**passa-baixas**).
- Filtros que deixam passar as altas frequências da imagem (**passa-altas**).
- Filtros que deixam passar as frequências da imagem em uma dada faixa (**passa-faixa**).

Nesta aula vamos aprender:

- Filtros que deixam passar as baixas frequências da imagem (**passa-baixas**).
- Filtros que deixam passar as altas frequências da imagem (**passa-altas**).
- Filtros que deixam passar as frequências da imagem em uma dada faixa (**passa-faixa**).
- Filtros que rejeitam as frequências da imagem em uma dada faixa (**rejeita-faixa**).

Vamos ainda aprender como projetar bancos de filtros **multi-escalas e multi-direcionais**.

No caso ideal teríamos filtros passa-baixas e passa-altas, respectivamente:

$$L(u, v) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } D(u, v) \leq D_l \\ 0, & \text{no c.c.} \end{array} \right\}$$
$$H(u, v) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } D(u, v) \geq D_h \\ 0, & \text{no c.c.} \end{array} \right\}$$

onde  $D_l > 0$  e  $D_h > 0$  definem as **frequências de corte**, e  $D(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$ .

- No entanto, a variação abrupta de valor desses filtros na frequência resulta um efeito *ringing* (falsas bordas) no domínio espacial.

- No entanto, a variação abrupta de valor desses filtros na frequência resulta um efeito *ringing* (falsas bordas) no domínio espacial.
- Uma alternativa é o uso de filtros de *Butterworth*, que possuem uma variação mais suave em torno das frequências de corte.

# Filtros de Butterworth

Os filtros de Butterworth de ordem  $n > 0$ , passa-baixas e passa-altas, são:

$$L(u, v) = \frac{1}{1 + 0.414 [D(u, v)/D_l]^{2n}}$$
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + 0.414 [D_h/D(u, v)]^{2n}}$$

Algumas observações importantes.

- Para  $n = 1$ ,  $L(u, v)$  e  $H(u, v)$  caem para  $\sqrt{2}/2$  de seus valores máximos em  $D(u, v) = D_l$  e  $D(u, v) = D_h$ , respectivamente.



Algumas observações importantes.

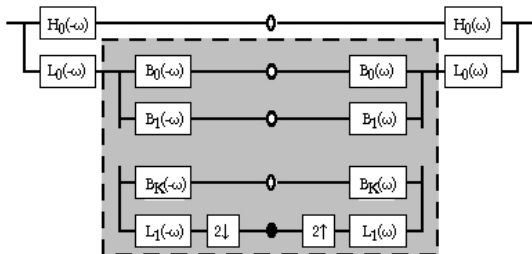
- Para  $n = 1$ ,  $L(u, v)$  e  $H(u, v)$  caem para  $\sqrt{2}/2$  de seus valores máximos em  $D(u, v) = D_l$  e  $D(u, v) = D_h$ , respectivamente.
- Para  $0 < D_l < D_h$ ,  $L(u, v) + H(u, v)$  é um filtro rejeita-faixa  $[D_l, D_h]$ .

Algumas observações importantes.

- Para  $n = 1$ ,  $L(u, v)$  e  $H(u, v)$  caem para  $\sqrt{2}/2$  de seus valores máximos em  $D(u, v) = D_l$  e  $D(u, v) = D_h$ , respectivamente.
- Para  $0 < D_l < D_h$ ,  $L(u, v) + H(u, v)$  é um filtro rejeita-faixa  $[D_l, D_h]$ .
- Para  $0 < D_h < D_l$ ,  $L(u, v)H(u, v)$  é um filtro passa-faixa  $[D_h, D_l]$ .

# Filtros multi-escalas e multi-direcionais

A figura abaixo ilustra o esquema clássico para decomposição de uma imagem em múltiplas escalas com filtragem em múltiplas direções do espectro (*Steerable Pyramid Decomposition*).



# Filtros multi-escalas e multi-direcionais

- A imagem é inicialmente filtrada por um passa-altas  $H_0$  e um passa-baixas  $L_0$ .

# Filtros multi-escalas e multi-direcionais

- A imagem é inicialmente filtrada por um passa-altas  $H_0$  e um passa-baixas  $L_0$ .
- O resultado do passa-baixas passa então por um banco de filtros direcionais  $B_0, B_1, \dots, B_K$  e novamente por um filtro passa-baixas  $L_1$ .

# Filtros multi-escalas e multi-direcionais

- A imagem é inicialmente filtrada por um passa-altas  $H_0$  e um passa-baixas  $L_0$ .
- O resultado do passa-baixas passa então por um banco de filtros direcionais  $B_0, B_1, \dots, B_K$  e novamente por um filtro passa-baixas  $L_1$ .
- O resultado do passa-baixas  $L_1$  é subamostrado e o processo inteiro pode se repetir no nó escuro da figura, que mostra também a reconstrução da imagem.

# Filtros multi-escalas e multi-direcionais

- A imagem é inicialmente filtrada por um passa-altas  $H_0$  e um passa-baixas  $L_0$ .
- O resultado do passa-baixas passa então por um banco de filtros direcionais  $B_0, B_1, \dots, B_K$  e novamente por um filtro passa-baixas  $L_1$ .
- O resultado do passa-baixas  $L_1$  é subamostrado e o processo inteiro pode se repetir no nó escuro da figura, que mostra também a reconstrução da imagem.
- A decomposição da imagem funciona como realce de texturas em diversas escalas, podendo ser usada para descrição de imagens.

# Filtros multi-escalas e multi-direcionais

Um exemplo pode ser visto em

<http://asp.eurasipjournals.com/content/2008/1/691924>.

Neste caso o espaço  $(u, v)$  é representado em coordenadas polares  $(r, \theta)$ .

$$L_k(r) = \frac{L(r/2)}{2}$$

$$H_k(r) = H(r/2)$$

$$L(r) = \begin{cases} 2 & r \leq \frac{\pi}{4} \\ 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \log_2\left(\frac{4r}{\pi}\right)\right) & \frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2} \\ 0 & r \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$H(r) = \begin{cases} 1 & r \geq \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \log_2\left(\frac{2r}{\pi}\right)\right) & \frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2} \\ 0 & r \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots, K - 1$ .



Os filtros passa-faixa são definidos por:

$$B_k(r, \theta) = H(r)G_k(\theta)$$

$$G_k(\theta) = \begin{cases} \alpha_k \left(\cos\left(\theta - \frac{\pi k}{K}\right)\right)^{K-1} & \left|\theta - \frac{\pi k}{K}\right| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{no caso contrário} \end{cases}$$

$$\alpha_k = 2^{k-1} \left( \frac{(K-1)!}{\sqrt{K[2(K-1)]!}} \right)$$