Introdução ao Processamento de Imagem Digital (MO443/MC920)

Prof. Alexandre Xavier Falcão

Segundo semestre de 2003

1 Convolução e Correlação

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais [1], contínuas, limitadas e finitas em x (e.g. um sinal de voz, onde x é o tempo.). A convolução e a correlação entre elas são definidas como:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x-x')dx' \quad (1)$$

$$f(x) \odot g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x+x')dx'. \quad (2)$$

Suponha, por exemplo, que

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } |x| \leq 2, \text{ e} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \text{ e} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \quad (4)$$

A convolução $h(x) = f(x) * g(x)$ envolve quatro etapas.

1. Reflexão $g(-x')$ em x':

$$g(-x') = \begin{cases} -2x', & \text{se } -2 \leq x' \leq 0, \text{ e} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \quad (5)$$

2. Deslocamento $g(x-x')$ de x em x':

$$g(x-x') = \begin{cases} -2x'+2x, & \text{se } x-2 \leq x' \leq x, \text{ e} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \quad (6)$$

[1] Se as funções fossem complexas, $f(x) \odot g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x')g(x+x')dx'$, onde $f^*(x')$ é o complexo conjugado de $f(x')$.

3. Multiplicação $f(x')g(x-x')$:

$$f(x')g(x-x') = \begin{cases} -4x'+4x, & \text{se } -2 \le x' \le x \text{ e } -2 \le x < 0, \\ -4x'+4x, & \text{se } x-2 \le x' \le x \text{ e } 0 \le x < 2, \\ -4x'+4x, & \text{se } x-2 \le x' \le 2 \text{ e } 2 \le x \le 4, \text{ e} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \tag{7}$$

4. Integralização $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x+x')dx'$ (i.e. a área do produto $f(x')g(x-x')$ é o valor da convolução para cada coordenada x):

$$h(x) = \begin{cases} 2x^2+8x+8, & \text{se } -2 \le x < 0, \\ 8, & \text{se } 0 \le x < 2, \\ -2x^2+8x, & \text{se } 2 \le x \le 4, \text{ e} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \tag{8}$$

A correlação é calculada de forma similar e representa a similaridade entre $f(x)$ e $g(x)$, medida usada em várias aplicações em processamento de imagens, quando estendida para 2D, tais como registro de imagens e estimação de movimento em vídeo.

Observe que a convolução obedece o princípio da superposição (distribuição e escalamento).

$$(af_1(x)+bf_2(x)) * g(x) = a(f_1(x) * g(x)) + b(f_2(x) * g(x)) \tag{9}$$

Este princípio é uma propriedade fundamental de sistemas lineares, onde $g(x)$ é a função de transferência do sistema (limitada e finita), e para toda entrada $f(x)$, limitada e finita, temos $f(x) * g(x)$ como resposta do sistema linear.

1.1 Convolução com a função impulso

A função impulso, ou delta de Dirac, é definida por:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = 0, \text{ e} \\ 0, & \text{no caso contrário,} \end{cases} \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x')dx' = 1. \tag{12}$$

A convolução de uma função $f(x)$ com $\delta(x)$ é $f(x)$, com $\delta(x - m \cdot \Delta_x)$, $m = 0, 1, \ldots, M-1$, é $f(x - m \cdot \Delta_x)$, e com $\sum_{m=0}^{M-1} \delta(x - m \cdot \Delta_x)$ (trem de impulsos) é $\sum_{m=0}^{M-1} f(x - m \cdot \Delta_x)$ (função f repetida ao longo de x a cada intervalo Δ_x).

Note que podemos descobrir a função de transferência de um sistema linear aplicando um impulso como entrada.

1.2 Amostragem

O processo de amostragem de uma função $f(x)$, limitada e finita, a intervalos Δ_x pode ser modelado como

$$f(x) \cdot \sum_{m=0}^{M-1} \delta(x - m \cdot \Delta_x) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m \cdot \Delta_x)\delta(x - m \cdot \Delta_x), \tag{13}$$

onde $\delta(x) = 1$, se $x = 0$, e 0 no caso contrário, é o impulso unitário, gerando M amostras $f(m \cdot \Delta_x)$, $m = 0, 1, \ldots, M-1$, de $f(x)$ espaçadas de intervalo Δ_x.

Isto é, um sinal discreto $I(x)$, $x = 0, 1, \ldots, M-1$, é um trem de impulsos de altura $f(m \cdot \Delta_x)$, $m = 0, 1, \ldots, M-1$, onde f é a função contínua amostrada (e.g. a corrente elétrica que representa um sinal de voz— neste caso, Δ_x é substituído por um intervalo de tempo Δ_t).

1.3 Convolução discreta

A convolução entre dois sinais discretos (finitos e limitados) é dada por:

$$H(x) = I(x) * J(x) = \sum_{x'=-\infty}^{+\infty} I(x')J(x - x'), \tag{14}$$

onde $x \in Z$.

Por exemplo:

$$I(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \text{ e} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \tag{15}$$

$$J(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in \{0, 1, 2\}, \text{ e} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \tag{16}$$

Similarmente, a convolução $H(x) = I(x) * J(x)$ pode ser calculada em quatro etapas tais que:

$$J(x - x') = \begin{cases} -2x' + 2x, & \text{se } x' \in \{x-2, x-1, x\}, \text{ e} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \tag{17}$$

$$H(x) = \begin{cases} \sum_{x'=-2}^{x} -4x' + 4x, & \text{se } x \in \{-2, -1, 0\}, \\ \sum_{x'=x-2}^{x} -4x' + 4x, & \text{se } x \in \{1, 2\}, \\ \sum_{x'=x-2}^{2} -4x' + 4x, & \text{se } x \in \{3, 4\}, \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \tag{18}$$

Observe que se $I(x)$ possui comprimento M_1 e $J(x)$ possui comprimento M_2, então $H(x) = I(x) * J(x)$ terá comprimento $M_1 + M_2 - 1$.

1.4 Filtragem por convolução discreta

Considere $I(x)$, o sinal discreto da Equação 15, e $J(x)$ um sinal discreto dado por

$$J(x) = \begin{cases} 1/3, & \text{se } x \in \{-1, 0, 1\}, \text{ e} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \tag{19}$$

Podemos suavizar as variações abruptas que ocorrem em $I(x)$, para $x = -2$ e $x = 2$, calculando a convolução discreta $H(x) = I(x) * J(x)$. Observe que $J(x)$ atua como a função de transferência de um filtro linear discreto.

1.5 Extensão para imagens

No caso de imagens digitais, os resultados acima podem ser estendidos para:

$$H(x, y) = I(x, y) * J(x, y) = \sum_{y'=-\infty}^{+\infty} \sum_{x'=-\infty}^{+\infty} I(x', y')J(x - x', y - y'), \tag{20}$$

$$H(x, y) = I(x, y) \odot J(x, y) = \sum_{y'=-\infty}^{+\infty} \sum_{x'=-\infty}^{+\infty} I(x', y')J(x + x', y + y'), \tag{21}$$

onde $I(x, y)$ e $J(x, y)$ são os valores dos pixels na imagem $\hat{I}$ e na imagem $\hat{J}$. Observe que $J(x, y)$ é refletida em x' e em y', e depois deslocada da esquerda para direita e de cima para baixo durante a convolução.

2 Exercícios

1. Calcule o resultado da convolução apresentada na seção 1.4.
2. Implemente uma função para calcular a convolução entre duas imagens.
3. Apresente um kernel de convolução para detectar pontos de variação brusca em sinais discretos.
4. Calcule a convolução $g(x) * f(x)$ das funções contínuas apresentadas nesta aula para mostrar que o resultado é o mesmo que $f(x) * g(x)$.
5. Calcule a correlação $f(x) \odot f(x - 4)$, e interprete o resultado.