Introdução ao Processamento de Imagem Digital (MO443/MC920)

Prof. Alexandre Xavier Falcão

Primeiro semestre de 2005

1 Introdução à morfologia matemática

A morfologia matemática é a parte do processamento de imagem não-linear que tem por objetivo extrair características da imagem associadas à geometria dos objetos. A morfologia matemática foi desenvolvida inicialmente por Georges Matheron e Jean Serra na década de 60, para imagens binárias utilizando a teoria de conjuntos. Posteriormente, ela foi estendida para imagens em tons cinza (funções) utilizando a teoria de reticulados, onde uma imagem é vista como a superfície de um relevo.

Nosso objetivo neste curso é apresentar apenas uma introdução à morfologia matemática.

1.1 Elemento estruturante

Uma transformação morfológica consiste essencialmente da comparação da imagem com outra menor, cuja geometria é conhecida, denominada elemento estruturante.

Um elemento estruturante planar é um conjunto de coordenadas de pixel. Por exemplo, o elemento cruz é definido por $E = \{(0,0),(-1,0),(1,0),(0,-1),(0,1)\}$. Uma transformação morfológica requer uma operação não-linear entre a imagem e o elemento estruturante, o qual desliza sobre a imagem de forma similar à convolução discreta. Neste sentido, o elemento estruturante planar define uma relação de adjacência do tipo $(p,q) \in A$ se $q - p \in E$.

Um elemento estruturante não-planar é um par (E,V) que consiste de um conjunto de coordenadas de pixel E e um conjunto de valores V associados a cada coordenada, assim como uma imagem. Por exemplo, $V = \{2,1,1,1,1\}$ para o caso do elemento cruz. Este tipo de elemento é usado apenas em operações com imagens em tons de cinza. Neste caso, o elemento estruturante pode ser visto como uma máscara de convolução, muito embora a operação seja outra. No caso particular, onde todos valores em V são zero, o elemento estruturante se torna planar.

1.2 Dilatação e Erosão

A dilatação e a erosão são as duas transformações morfológicas básicas, as quais são combinadas para gerar várias outras. Elas envolvem as seguintes operações com conjuntos de coordenadas de pixel.

- Translação

  Um conjunto A transladado de $t = (x_t, y_t)$ é um conjunto $A^t = \{p + t : \forall p \in A\}$.

- Reflexão

  Um conjunto A refletido é um conjunto $A^r = \{q = -p : \forall p \in A\}$.

1.2.1 Dilatação

Considere $\hat{I} = (D_I, I)$ uma imagem binária e o conjunto $U_I \subset D_I$ formato pelos pixels $p \in D_I$, tais que $I(p) = 1$. A dilatação $\hat{I} \oplus E$ de $\hat{I}$ por um elemento estruturante planar E resulta em uma imagem binária $\hat{J} = (D_J, J)$, onde

$$U_J = \{t : (E^r)^t \cap U_I \neq \emptyset\}. \tag{1}$$

Isto é, U_J é formado por todos os deslocamentos t tais que o elemento estruturante refletido e transladado superpõe os pixels com valor 1 na imagem em pelo menos um pixel. Note que $J(p) = 1$ se $p \in U_J \subset D_J$ e zero no caso contrário.

Como não se trata de uma convolução, temos apenas uma analogia, alguns autores não refletem o elemento estruturante.
Exemplo:

Sejam $U_I = \{(1,1),(2,1)\}$ e $E = \{(0,0),(0,1)\}$, então $E^r = \{(0,0),(0,-1)\}$ e $(E^r)^t = \{(x_t, y_t),(x_t, y_t - 1)\}$. Se $t = (0,0)$, $(E^r)^t \cap U_I = \emptyset$; se $t = (1,1)$, $(E^r)^t \cap U_I = \{(1,1)\}$; etc. Ao final teremos, $U_J = \{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\}$.

Observe que os objetos representados por pixels com valor 1 na imagem ficam mais "gordos" e que pequenos buracos podem ser fechados com a dilatação.

Se $\hat{I} = (D_I, I)$ for uma imagem em tons de cinza, a dilatação $\hat{I} \oplus (E, V)$ de $\hat{I}$ por um elemento estruturante não-planar (E, V) resulta em uma imagem em tons de cinza $\hat{J} = (D_J, J)$ onde

$$J(p) = \max_{\forall t \in E}\{I(p - t) + V(t)\}, \tag{2}$$

para todo $p \in D_J$ e $p - t \in D_I$. Neste caso, a imagem fica mais clara e somem pequenas regiões escuras.

1.2.2 Erosão

A erosão $\hat{I} \ominus E$ de uma imagem binária $\hat{I}$ por um elemento estruturante planar E resulta em uma imagem binária $\hat{J} = (D_J, J)$, onde

$$U_J = \{t : (E^r)^t \subseteq U_I\}. \tag{3}$$

Isto é, U_J é formado por todos os deslocamentos t tais que o elemento estruturante refletido e transladado está inteiramente contido no conjunto dos pixels com valor 1 da imagem de entrada.

Exemplo:

Sejam $U_I = \{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\}$ e $E = \{(0,0),(0,1)\}$, então $E^r = \{(0,0),(0,-1)\}$ e $(E^r)^t = \{(x_t,y_t),(x_t,y_t-1)\}$. Se $t=(0,0)$, $(E^r)^t = \{(0,0),(0,-1)\}$; se $t=(1,1)$, $(E^r)^t = \{(1,1),(1,0)\}$; ...; se $t=(1,2)$, $(E^r)^t = \{(1,2),(1,1)\}$; etc. Ao final teremos $U_J = \{(1,2),(2,2)\}$.

Observe que os objetos representados por pixels com valor 1 na imagem ficam mais "magros" e que pequenos componentes com valor 1 somem com a erosão.

Se $\hat{I} = (D_I, I)$ for uma imagem em tons de cinza, a erosão $\hat{I} \ominus (E,V)$ de $\hat{I}$ por um elemento estruturante não-planar (E,V) resulta em uma imagem em tons de cinza $\hat{J} = (D_J, J)$ onde

$$J(p) \quad = \quad \min_{\forall t \in E}\{I(p-t) - V(t)\}, \tag{4}$$

para todo $p \in D_J$ e $p - t \in D_I$. Neste caso, a imagem fica mais escura e somem pequenas regiões claras.

1.3 Algoritmo genérico para dilatação/erosão

Observe que a dilatação e a erosão de imagens cinza por elemento estruturante não-planar incluem os casos de imagens binárias e elemento planar. Para facilitar, podemos também restringir o resultado ao domínio da imagem de entrada— i.e. $D_J = D_I$.

Algoritmo para dilatação:
Entrada: Imagem cinza $\hat{I} = (D_I, I)$ e elemento estruturante não-planar (E,V).
Saída: Imagem cinza $\hat{J} = (D_I, J) = \hat{I} \oplus (E,V)$.

1. Calcule a reflexão E^r mapeando todo $(x,y) \in E$ para $(-x,-y) \in E^r$ e $V(-x,-y) \leftarrow V(x,y)$.
2. Calcule a relação de adjacência A, tal que $q \in A(p)$ se $q - p \in E^r$.
3. Para todo pixel $p \in D_I$, faça
4. $\quad$ $J(p) \leftarrow -\infty$.
5. $\quad$ Para todo pixel $q \in A(p)$, tal que $q \in D_I$, faça
6. $\quad\quad$ Se $(I(q) + V(q-p)) > J(p)$, então $J(p) \leftarrow I(q) + V(q-p)$.

A erosão pode ser calculada de forma similar. Também é comum restringir os valores de J entre 0 e um valor máximo $2^b - 1$.

2 Exercícios

1. Calcule as imagens resultantes da dilatação e da erosão de $\hat{I} = (D_I, I)$, $D_I = \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,2)\}$ e $I = \{0, 2, 2, 1\}$, pelo elemento $E = \{(-1,0), (0,0), (1,0)\}$ cujos valores $V = \{1, 2, 1\}$.

2. Mostre que se $V = \{0, 0, 0\}$ e $I = \{0, 1, 1, 0\}$ na imagem anterior, a dilatação pelo algoritmo acima apresentaria o mesmo resultado da dilatação pela teoria de conjuntos.

3. Implemente o algoritmo acima para dilatação e para erosão.