Introdução ao Processamento de Imagem Digital (MO443/MC920)

Prof. Alexandre Xavier Falcão

Primeiro semestre de 2005

1 Filtragem na Freqüência

Pelo teorema da convolução, se $J(x, y)$ é a função de transferência de um filtro linear cujo resultado da filtragem é $I(x, y) * J(x, y)$, então esta operação no domínio da freqüência equivale ao produto das transformadas $\vec{I}(u, v)\vec{J}(u, v)$. Isto significa que, dependendo do tamanho da máscara de convolução, pode ser mais vantagem calcular a FFT de I e de J, multiplicar os espectros de freqüência, e depois calcular a FFT inversa do resultado.

Outra forma de explorar o teorema da convolução é o projeto de filtros no domínio da freqüência. Sabemos que regiões de borda e outras transições abruptas de cinza correspondem a componentes de alta freqüência, enquanto as baixas freqüências representam regiões mais homogêneas na imagem original. Neste contexto, filtros no domínio da freqüência podem ser de quatro tipos: passa-baixas, rejeita-faixa, passa-faixa, e passa-altas freqüências. Os extremos variam da suavização da imagem ao realce de bordas.

Vamos estudar o caso $J(u, v)$ real. Isto é, filtros que não modificam a fase da imagem original (*zero-phase-shift filters*).

1.1 Filtragem ideal

No caso ideal temos como filtros passa-baixas e passa-altas, respectivamente:

$$L(u,v) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } D(u,v) \leq D_l \\ 0, & \text{no c.c.} \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$H(u,v) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } D(u,v) \geq D_h \\ 0, & \text{no c.c.} \end{array} \right\} \quad (2)$$

onde $D_l > 0$ e $D_h > 0$ definem as freqüências de corte, e $D(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$. Note que para $0 < D_l < D_h$, $L(u, v) + H(u, v)$ é um filtro rejeita-faixa $[D_l, D_h]$, e para $0 < D_h < D_l$, $L(u, v)H(u, v)$ é um filtro passa-faixa $[D_h, D_l]$.

Muito embora esses filtros possam ser usados para simulação no computador, eles não podem ser implementados com componentes eletrônicos. A variação abrupta na freqüência também gera um efeito *ringing* (falsas bordas) no espaço. Uma alternativa é o filtro de *Butterworth*, que possui uma variação mais suave em torno das freqüências de corte.

1.2 Filtros de Butterworth

Os filtros de Butterworth de ordem $n > 0$, passa-baixas e passa-altas, são:

$$L(u,v) = \frac{1}{1 + 0.414\left[D(u,v)/D_l\right]^{2n}} \quad (3)$$

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + 0.414\left[D_h/D(u,v)\right]^{2n}} \quad (4)$$

Note que para $n = 1$, $L(u,v)$ e $H(u,v)$ caem para $\sqrt{2}/2$ de seus valores máximos em $D(u,v) = D_l$ e $D(u,v) = D_h$, respectivamente.

1.3 Geração de máscaras espaciais a partir de especificações na freqüência

Considere $G(u,v)$ o espectro em freqüência de um filtro linear como uma função real e simétrica. Sua inversa será a máscara espacial $g(x,y)$ real e simétrica. Para facilitar, suponha que o número de amostras é o mesmo em ambas direções, i.e. $M = N$. É muito conveniente projetar $G(u,v)$ na freqüência, mas implementá-lo por convolução espacial usando uma máscara $g'(x,y)$ com poucos coeficientes. A máscara $g'(x,y)$ é uma restrição de $g(x,y)$, tal que $g'(x,y) = g(x,y)$ para $-N/2 < -n/2 \leq x, y \leq n/2 < N/2$, e $g'(x,y) = 0$ para $-N/2 < -n/2 > x, y > n/2 < N/2$. Esta restrição faz com que haja um erro e de aproximação entre o filtro $G(u,v)$ projetado e o implementado $G'(u,v)$.

$$e^2 = \sum_{u=-N/2}^{N/2} \sum_{v=-N/2}^{N/2} \left|G'(u,v) - G(u,v)\right|^2 \quad (5)$$

O objetivo desta seção é mostrar como obter os coeficientes de $g'(x,y)$ com erro quadrático e^2 mínimo.

O espectro $G'(u,v)$ com $(N+1)^2$ elementos pode ser representado em um vetor coluna $\mathbf{G}'$, cujos valores $G(i)$ são gerados variando $v = -N/2, \ldots, N/2$, $u = -N/2, \ldots, N/2$, $i = (u+N/2)(N+1)+(v+N/2)$, de forma que uma coluna de $G'(u,v)$ é copiada após a outra para $\mathbf{G}'$. O mesmo procedimento pode ser aplicado ao espectro $G(u,v)$ para gerar o vetor coluna $\mathbf{G}$ e à máscara $g'(x,y)$ para gerar o vetor coluna $\mathbf{g}'$ com $(n+1)^2$ elementos, cujos valores $g'(k)$ são gerados variando $y = -n/2, \ldots, n/2$, $x = -n/2, \ldots, n/2$, $k = (x+n/2)(n+1)+(y+n/2)$. Assim, a transformada de Fourier de $\mathbf{g}'$ pode ser expressa na forma matricial

$$\mathbf{G}' = \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}', \quad (6)$$

onde $\mathbf{w}$ é uma matriz de $(N+1)^2$ linhas e $(n+1)^2$ colunas, cujos valores $w(k,i) = \frac{1}{N+1} \exp^{\frac{-j2\pi}{N+1}(ux+vy)}$ da coluna k e linha i são gerados linha por linha, variando $y = -n/2, \ldots, n/2$, $x = -n/2, \ldots, n/2$,

$v = -N/2, \ldots, N/2$, $u = -N/2, \ldots, N/2$, e calculando os índices $k = (x{+}n/2)(n{+}1){+}(y{+}n/2)$ e $i = (u + N/2)(N + 1) + (v + N/2)$. A minimização de e^2 implica que

$$
\begin{aligned}
e^2 &= (\mathbf{G}' - \mathbf{G})(\mathbf{G}' - \mathbf{G}) = \|\mathbf{w}\mathbf{g}' - \mathbf{G}\|^2 && (7)\\
\frac{\delta e^2}{\delta \mathbf{g}'} &= 2\mathbf{w}^* \left(\mathbf{w}\mathbf{g}' - \mathbf{G}\right) = 0 && (8)\\
\mathbf{g}' &= (\mathbf{w}^*\mathbf{w})^{-1}\mathbf{w}^*\mathbf{G} && (9)
\end{aligned}
$$

onde $\mathbf{w}^*$ é o conjugado transposto (matriz de $(n + 1)^2$ linhas e $(N + 1)^2$ colunas) de $\mathbf{w}$ e $(\mathbf{w}^*\mathbf{w})^{-1}\mathbf{w}^*$ é chamada a inversa generalizada de *Moore-Penrose*. Note que, basta expressar o filtro projetado $G(u, v)$ na forma vetorial $\mathbf{G}$, calcular $\mathbf{g}'$, e depois colocá-lo na forma $g'(x, y)$.

2 Exercícios

1. Projete filtros passa-faixa e rejeita-faixa usando os filtros passa-baixas e passa-altas de Butterworth.

2. Implemente uma função para calcular a filtragem de $I(x, y)$ pela máscara $J(x, y)$ no domínio da freqüência.

3. Implemente uma função para calcular uma máscara $g'(x, y)$ a partir de uma especificação $G(u, v)$ em freqüência.

4. Calcule $g'(x, y)$ para os filtros passa-baixas e passa-altas de Butterworth e compare os resultados da filtragem espacial com a filtragem em freqüência para uma imagem de entrada qualquer.

5. Considere as imagens das máscaras de Sobel e do filtro Gaussiano 3×3. Insira 253 zeros na horizontal e na vertical, e calcule a FFT de todas elas para visualizar seus espectros de magnitude com resolução 256×256 amostras. Que tipos de filtros em freqüência essas máscaras representam?