Introdução ao Processamento de Imagem Digital (MO443/MC920)

Prof. Alexandre Xavier Falcão

Segundo semestre de 2003

1 Algoritmo da Transformada Rápida de Fourier

Pela propriedade de separabilidade, o algoritmo 1D da transformada rápida de Fourier pode ser usado na horizontal e depois na vertical. Considere a somatória da transformada de Fourier 1D discreta

$$\vec{I}(u) = \sum_{x=0}^{M-1} I(x) W_M^{ux}, \quad \text{u=0,1,...,M-1} \tag{1}$$

Seja $M = 2^m$, e quando não for o caso, complete com zeros a função $I(x)$ para que M seja sempre uma potência de 2. Podemos substituir $M = 2M'$ e reescrever a somatória acima como

$$\vec{I}(u) = \sum_{x=0}^{2M'-1} I(x) W_{2M'}^{ux}, \quad \text{u=0,1,...,2M'-1} \tag{2}$$

Esta somatória pode ainda ser dividida nas somatórias dos termos pares e ímpares, mas o resultado só será válido para as $\frac{M}{2}$ primeiras amostras, $u = 0, 1, \ldots, M' - 1$, devido à subamostragem.

$$\vec{I}(u) = \sum_{x=0}^{M'-1} I(2x) W_{M'}^{ux} + \sum_{x=0}^{M'-1} I(2x+1) W_{M'}^{ux} W_{2M'}^{u}, \quad \text{u=0,1,...,M'-1.} \tag{3}$$

$$\vec{I}(u) = \vec{I}_{par}(u) + \vec{I}_{impar}(u) W_{2M'}^{u}, \quad \text{u=0,1,...,M'-1.} \tag{4}$$

Para calcular a outra metade $\vec{I}(u+M')$, $u = 0, 1, \ldots, M'-1$, usamos o fato que $W_{M'}^{u+M'} = W_{M'}^{u}$ e $W_{2M'}^{u+M'} = -W_{2M'}^{u}$ são periódicas.

$$\vec{I}(u+M') = \sum_{x=0}^{M'-1} I(2x) W_{M'}^{(u+M')x} + \sum_{x=0}^{M'-1} I(2x+1) W_{M'}^{(u+M')x} W_{2M'}^{(u+M')}, \quad \text{u=0,1,...,M'-1.} \tag{5}$$

$$\vec{I}(u+M') = \vec{I}_{par}(u) - \vec{I}_{impar}(u) W_{2M'}^{u}, \quad \text{u=0,1,...,M'-1.} \tag{6}$$

Portanto, uma transformada de Fourier de M amostras pode ser obtida dividindo-se a expressão em duas partes e calculando-se duas transformadas de $\frac{M}{2}$ amostras, $\vec{I}_{par}(u)$ e $\vec{I}_{impar}(u)$, as quais devem ser combinadas conforme as equações acima. Estamos reduzindo M^2 multiplicações para $2\frac{M^2}{4} = \frac{M^2}{2}$ multiplicações. Esta estratégia é repetida recursivamente até $M' = 1$ (final da recursão). O algoritmo terá complexidade $M \log_2^M$.

Exemplo: Suponha uma seqüência $I(x) =< I(0), I(1), \ldots, I(7) >$ com $M = 8$ amostras. A primeira divisão separa esta seqüência nas amostras pares $I_0(x) =< I(0), I(2), I(4), I(6) >$ e nas ímpares $I_1(x) =< I(1), I(3), I(5), I(7) >$, $x = 0, 1, 2, 3$, cujas transformadas $\vec{I}_0(u)$ e $\vec{I}_1(u)$, $u = 0, 1, 2, 3$, são combinadas da seguinte forma.

$$\vec{I}(u) = \vec{I}_0(u) + \vec{I}_1(u) W_8^u, \quad \text{u=0,1,2,3.} \tag{7}$$
$$\vec{I}(u+4) = \vec{I}_0(u) - \vec{I}_1(u) W_8^u, \quad \text{u=0,1,2,3.} \tag{8}$$

A segunda divisão separa $I_0(x)$ em pares $I_{00}(x) =< I(0), I(4) >$ e ímpares $I_{01}(x) =< I(2), I(6) >$, $x = 0, 1$, e $I_1(x)$ em pares $I_{10}(x) =< I(1), I(5) >$ e ímpares $I_{11}(x) =< I(3), I(7) >$, $x = 0, 1$, cujas transformadas $\vec{I}_{00}(u)$, $\vec{I}_{01}(u)$, $\vec{I}_{10}(u)$ e $\vec{I}_{11}(u)$, $u = 0, 1$, são combinadas da seguinte forma.

$$\vec{I}_0(u) = \vec{I}_{00}(u) + \vec{I}_{01}(u) W_4^u, \quad \text{u=0,1.} \tag{9}$$
$$\vec{I}_0(u+2) = \vec{I}_{00}(u) - \vec{I}_{01}(u) W_4^u, \quad \text{u=0,1.} \tag{10}$$
$$\vec{I}_1(u+4) = \vec{I}_{10}(u) + \vec{I}_{11}(u) W_4^u, \quad \text{u=0,1.} \tag{11}$$
$$\vec{I}_1(u+6) = \vec{I}_{10}(u) - \vec{I}_{11}(u) W_4^u, \quad \text{u=0,1.} \tag{12}$$

A terceira e última divisão separa $I_{00}(x)$ em par $I_{000}(x) =< I(0) >$ e ímpar $I_{001}(x) =< I(4) >$, $x = 0$; $I_{01}(x)$ em par $I_{010}(x) =< I(2) >$ e ímpar $I_{011}(x) =< I(6) >$, $x = 0$; $I_{10}(x)$ em par $I_{100}(x) =< I(1) >$ e ímpar $I_{101}(x) =< I(5) >$, $x = 0$; e $I_{11}(x)$ em par $I_{110}(x) =< I(3) >$ e ímpar $I_{111}(x) =< I(7) >$, $x = 0$; cujas transformadas $\vec{I}_{000}(u) = I(0)$, $\vec{I}_{001}(u) = I(4)$, $\vec{I}_{010}(u) = I(2)$, $\vec{I}_{011}(u) = I(6)$, $\vec{I}_{100}(u) = I(1)$, $\vec{I}_{101}(u) = I(5)$, $\vec{I}_{110}(u) = I(3)$, $\vec{I}_{111}(u) = I(7)$, $u = 0$, são combinadas da seguinte forma.

$$\vec{I}_{00}(u) = I(0) + I(4) W_2^u, \quad \text{u=0.} \tag{13}$$
$$\vec{I}_{00}(u+1) = I(0) - I(4) W_2^u, \quad \text{u=0.} \tag{14}$$
$$\vec{I}_{01}(u+2) = I(2) + I(6) W_2^u, \quad \text{u=0.} \tag{15}$$
$$\vec{I}_{01}(u+3) = I(2) - I(6) W_2^u, \quad \text{u=0.} \tag{16}$$
$$\vec{I}_{10}(u+4) = I(1) + I(5) W_2^u, \quad \text{u=0.} \tag{17}$$
$$\vec{I}_{10}(u+5) = I(1) - I(5) W_2^u, \quad \text{u=0.} \tag{18}$$
$$\vec{I}_{11}(u+6) = I(3) + I(7) W_2^u, \quad \text{u=0.} \tag{19}$$
$$\vec{I}_{11}(u+7) = I(3) - I(7) W_2^u, \quad \text{u=0.} \tag{20}$$

Note que o valor de x na seqüência original para identificar a amostra $I(x) = \vec{I}_{b_1 b_2 b_3}(u)$, $u = 0$, pode ser obtido revertendo a ordem do índice binário $b_1 b_2 b_3$ para $b_3 b_2 b_1$ e convertendo o resultado para decimal. Isto é, índice 000 equive à $x = 0$, índice 001 equive à $x = 4$, índice

010 equive à $x = 2$, índice 011 equive à $x = 6$, índice 100 equive à $x = 1$, índice 101 equive à $x = 5$, índice 110 equive à $x = 3$, e índice 111 equive à $x = 7$.

Portanto, o algoritmo deve aplicar a ordem reversa dos bits para reordenar a seqüência de amostras $< I(0), I(1), I(2), I(3), I(4), I(5), I(6), I(7) >$ do sinal original em $< I(0), I(4), I(2), I(6), I(1), I(5), I(3), I(7) >$, e depois combinar duas as duas conforme às equações acima, seguindo a ordem da volta da recursão.

2 Exercícios

1. Repita o mesmo raciocício para a transformada inversa e implemente o algoritmo para calcular a FFT 1D direta e inversa.

2. Teste seu algoritmo na transformada do cosseno.

3. Implemente as transformadas FFT 2D direta e inversa em função do algoritmo para os casos 1D.