Introdução ao Processamento de Imagem Digital (MO443/MC920)

Prof. Alexandre Xavier Falcão

Segundo semestre de 2003

1 Transformada de Fourier Discreta

Considere as imagens $\hat{I} = (D_I, I')$, com $N_1 \times M_1$ pixels, e $\hat{J} = (D_J, J')$, com $N_2 \times M_2$ pixels, e duas funções discretas $R_{MN}(x,y)$ e $R_{MN}(u,v)$, $M = M_1 + M_2 - 1$ e $N = N_1 + N_2 - 1$, tais que

$$R_{MN}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, M-1] \text{ e } y \in [0, N-1], \text{ e} \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases} \tag{1}$$

$$R_{MN}(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \in [0, M-1] \text{ e } v \in [0, N-1], \text{ e} \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases} \tag{2}$$

Considere as extensões $I(x,y)$ de $I'(x,y)$ e $J(x,y)$ de $J'(x,y)$, onde zeros são acrescentados na horizontal e na vertical até $(M-1, N-1)$. Então, suas extensões periódicas $I_p(x,y)$ e $J_p(x,y)$, com períodos (M,N), e suas séries de Fourier discretas $\vec{I}_p(u,v)$ e $\vec{J}_p(u,v)$, devem ser tais que

$$I(x,y) = I_p(x,y)R_{MN}(x,y) = \begin{cases} I'(x,y), & \text{se } x \in [0, M_1-1] \text{ e } y \in [0, N_1-1], \text{ e} \\ 0, & \text{se } x \in [M_1, M-1] \text{ ou } y \in [N_1, N-1] \end{cases} \tag{3}$$

$$\vec{I}_p(u,v)R_{MN}(u,v) = \vec{I}(u,v), \quad \text{para } u \in [0, M-1] \text{ e } v \in [0, N-1]. \tag{4}$$

$$J(x,y) = J_p(x,y)R_{MN}(x,y) = \begin{cases} J'(x,y), & \text{se } x \in [0, M_2-1] \text{ e } y \in [0, N_2-1], \text{ e} \\ 0, & \text{se } x \in [M_2, M-1] \text{ ou } y \in [N_2, N-1] \end{cases} \tag{5}$$

$$\vec{J}_p(u,v)R_{MN}(u,v) = \vec{J}(u,v), \quad \text{para } u \in [0, M-1] \text{ e } v \in [0, N-1]. \tag{6}$$

onde $\vec{I}(u,v)$ e $\vec{J}(u,v)$ são as transformadas de Fourier discretas de $I(x,y)$ e $J(x,y)$.

Substituindo $\exp^{\frac{-j2\pi}{M}}$ por W_M e $\exp^{\frac{-j2\pi}{N}}$ por W_N temos

$$\vec{I}(u,v) = R_{MN}(u,v)\left[\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} I(x,y) W_M^{ux} W_N^{vy}\right] \tag{7}$$

$$I(x,y) = R_{MN}(x,y)\left[\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} \vec{I}(u,v) W_M^{-ux} W_N^{-vy}\right] \tag{8}$$

1.1 Propriedades

1.1.1 Distributividade e escalamento

$$aI(x,y) + bJ(x,y) \leftrightarrow a\vec{I}(u,v) + b\vec{J}(u,v) \quad (9)$$

$$I(ax,by) \leftrightarrow \vec{I}\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right) \quad (10)$$

Observe que a subamostragem $I(ax,by)$ é obtida para $a>1$ e $b>1$, e a superamostragem para $0<a<1$ e $0<b<1$. A primeira aproxima as repetições do espectro em freqüência (podendo ocasionar aliasing), enquanto a segunda afasta essas repetições.

1.1.2 Translação

A translação é redefinida como deslocamento circular de $I(x,y)$, ou translação da série $I_p(x,y)$. O mesmo sendo válido para o domínio da freqüência.

$$I_p(x+m,y+n)R_{MN}(x,y) \leftrightarrow W_M^{mu}W_N^{nv}\vec{I}(u,v) \quad (11)$$

$$W_M^{-mu}W_N^{-nv}I(x,y) \leftrightarrow \vec{I}_p(u+m,v+n)R_{MN}(u,v) \quad (12)$$

$$(13)$$

1.1.3 Teorema da Convolução

A convolução discreta é redefinida como convolução circular (ou periódica),

$$I(x,y)*J(x,y) = R_{MN}(x,y)\left[\sum_{x'=0}^{M-1}\sum_{y'=0}^{N-1} I_p(x',y')J_p(x-x',x-y')\right] \quad (14)$$

$$\vec{I}(u,v)*\vec{J}(u,v) = R_{MN}(u,v)\left[\sum_{u'=0}^{M-1}\sum_{v'=0}^{N-1} \vec{I}_p(u',v')\vec{J}_p(u-u',v-v')\right]. \quad (15)$$

Observe que o resultado da convolução circular é essencialmente o mesmo da convolução discreta para $M \geq M_1 + M_2 - 1$ e $N \geq N_1 + N_2 - 1$. O teorema da convolução fica, portanto,

$$I(x,y)*J(x,y) \leftrightarrow \vec{I}(u,v)\vec{J}(u,v) \quad (16)$$

$$I(x,y)J(x,y) \leftrightarrow \frac{1}{(MN)^2}\vec{I}(u,v)*\vec{J}(u,v) \quad (17)$$

1.1.4 Teorema da Correlação

A correlação discreta é redefinida como convolução circular (ou periódica),

$$I(x,y)\odot J(x,y) = R_{MN}(x,y)\left[\sum_{x'=0}^{M-1}\sum_{y'=0}^{N-1} I_p(x',y')J_p(x+x',x+y')\right] \quad (18)$$

$$\vec{I}(u,v)\odot \vec{J}(u,v) = R_{MN}(u,v)\left[\sum_{u'=0}^{M-1}\sum_{v'=0}^{N-1} \vec{I}_p^*(u',v')\vec{J}_p(u+u',v+v')\right], \quad (19)$$

onde $\vec{I}_p^*(u',v')$ é o conjugado de $\vec{I}_p(u',v')$. Observe que o resultado da convolução circular é essencialmente o mesmo da convolução discreta para $M \geq M_1 + M_2 - 1$ e $N \geq N_1 + N_2 - 1$. O teorema da correlação fica, portanto,

$$I(x,y) \odot J(x,y) \quad \leftrightarrow \quad \vec{I}^*(u,v)\vec{J}(u,v) \tag{20}$$

$$\vec{I}(x,y)J(x,y) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{(MN)^2}\vec{I}^*(u,v) \odot \vec{J}(u,v) \tag{21}$$

1.1.5 Rotação

Expressando $I(x,y)$ e $\vec{I}(u,v)$ em coordenadas polares $I(r,\theta)$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, e $\vec{I}(r',\phi)$, $u = r'\cos(\phi)$ e $v = r'\sin(\phi)$, temos que

$$I(r,\theta+\alpha) \quad \leftrightarrow \quad \vec{I}(r',\phi+\alpha) \tag{22}$$

1.1.6 Separabilidade

A transformada $\vec{I}(u,v)$ de $I(x,y)$ pode ser separada em duas transformadas 1D, uma na horizontal e outra na vertical. O mesmo vale para a inversa.

$$\sum_{x=0}^{M-1}\left[\sum_{y=0}^{N-1} I(x,y)W_N^{vy}\right]W_M^{ux} = \sum_{x=0}^{M-1}\vec{I}(x,v)W_M^{ux} \tag{23}$$

$$\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1}\vec{I}_p(u,v)W_N^{-vy}\right]W_M^{-ux} = \frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1} I_p(u,y)W_M^{-ux} \tag{24}$$

Note que para cada valor de $\vec{I}(x,v)$, $x = 0,1,\ldots,M-1$, $v = 0,1,\ldots,N-1$, na Equação 23 temos que calcular N multiplicações de $I(x,y)$ por W_N^{vy}, $y = 0,1,\ldots,N-1$, e que para cada valor de $\vec{I}(u,v)$, $u = 0,1,\ldots,M-1$, $v = 0,1,\ldots,N-1$, temos que calcular M multiplicações de $\vec{I}(x,v)$ por W_M^{ux}, $x = 0,1,\ldots,M-1$. Portanto, a separabilidade já permite que a complexidade original seja reduzida de $O(M^2N^2)$ para $O(MN^2 + NM^2)$. A transformada rápida de Fourier (FFT-*Fast Fourier Transform*) explora esta propriedade e a periodicidade das funções W_M^u e W_N^v para reduzir a complexidade para $O(MN\log_2^N + NM\log_2^M)$.

2 Exercícios

Demonstre todas as propriedades vistas nesta aula.