Introdução ao Processamento de Imagem Digital (MO443/MC920)

Prof. Alexandre Xavier Falcão

Primeiro semestre de 2005

1 Transformada de Fourier

Seja $f(x)$ uma função real e contínua, sua transformada de Fourier $\vec{F}(u) = \{F_{Re}(u), F_{Im}(u)\} = F_{Re}(u) + jF_{Im}(u)$ e a inversa são dadas por

$$\vec{F}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp^{-j2\pi ux}\,dx \tag{1}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(u)\exp^{j2\pi ux}\,du. \tag{2}$$

Note que, mesmo considerando apenas funções $f(x)$ reais (caso particular), a transformada é normalmente complexa, exceto quando $f(x)$ é uma função par (i.e. $f(x) = f(-x)$).

Alguns exemplos úteis são:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq x_o, \text{ e} \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases} \leftrightarrow \quad F(u) = 2x_oSa(2\pi x_ou) \tag{3}$$

$$f(x) = 2u_oSa(2\pi u_ox) \leftrightarrow \quad F(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } |u| \leq u_o, \text{ e} \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases} \tag{4}$$

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\Delta_x) \leftrightarrow \quad F(u) = \tfrac{1}{\Delta_x}\textstyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{m}{\Delta_x}) \tag{5}$$

$$f(x) = \cos(2\pi u_ox) \leftrightarrow \quad F(u) = \tfrac{1}{2}\left[\delta(u-u_o) + \delta(u+u_o)\right] \tag{6}$$

$$\frac{d^{(n)}f}{dx}(x) \leftrightarrow \quad (2\pi uj)^n\vec{F}(u) \tag{7}$$

$$f(x) = \sin(2\pi u_ox) \leftrightarrow \quad \vec{F}(u) = \tfrac{j}{2}\left[\delta(u+u_o) - \delta(u-u_o)\right] \tag{8}$$

$$h(x) = f(x) * g(x) \leftrightarrow \quad \vec{H}(u) = \vec{F}(u)\vec{G}(u) \tag{9}$$

$$h(x) = f(x)g(x) \leftrightarrow \quad \vec{H}(u) = \vec{F}(u) * \vec{G}(u) \tag{10}$$

onde $Sa(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$, $g(x)$ é uma função real e contínua e os dois últimos exemplos são chamados teoremas da convolução no espaço e na freqüência, respectivamente.

1.1 Modulação em freqüência

Suponha que $F(u)$ é o espectro de freqüência de um sinal de voz, o qual está limitado em faixa $[-u_o, u_o]$ (i.e. $F(u) \neq 0$, se $|u| \leq u_o$, e $F(u) = 0$, no c.c.). Sua transmissão em um canal na freqüência u_p MHz, $u_p >> u_o$, requer que $f(t)$ seja multiplicado por uma portadora $\cos(2\pi u_p t)$ (ou $\sin(2\pi u_p t)$), o que pelas Equações 6 e 10 faz com que seu espectro seja deslocado para as freqüências u_p e $-u_p$ MHz:

$$\frac{1}{2}F(u - u_p) + \frac{1}{2}F(u + u_p). \tag{11}$$

Este processo, conhecido como modulação em freqüência, é utilizado em rádio FM analógica para transmitir simultaneamente vários canais de rádio a freqüências u_p diferentes.

1.2 Transformada de Fourier Discreta

Para facilitar, considere inicialmente $f(x)$ um sinal real, contínuo, par e limitado em faixa $[-u_o, u_o]$ (i.e. ilimitado no espaço). Se amostrarmos $f(x)$ a intervalos Δ_x, teremos pela combinação das Equações 5 e 10:

$$f_a(x) = f(x) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\Delta_x) \leftrightarrow \quad F_a(u) = \frac{1}{\Delta_x} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(u - \frac{m}{\Delta_x}). \tag{12}$$

Isto é, o espectro de freqüência $F_a(u)$ do sinal amostrado é periódico com período $\frac{1}{\Delta_x}$.

Observe que podemos recuperar o sinal original a partir do espectro do sinal amostrado, ou melhor, de suas amostras no espaço. Basta multiplicar $F_a(u)$ por uma função $\Delta_x G(u)$, onde $G(u)$ é dada pela Equação 4. Pela Equação 9, esta operação equivale à convolução entre $f_a(x)$ e $\Delta_x g(x)$, onde $g(x) = 2u_o Sa(2\pi u_o x)$, que resulta em:

$$f(x) \quad = \quad 2\Delta_x u_o \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m\Delta_x) Sa(2\pi u_o(x - m\Delta_x)) \tag{13}$$

Esta equação é conhecida como fórmula da interpolação, pois podemos utilizá-la com este propósito.

Observe também que se o intervalo Δ_x de amostragem fosse tal que $\frac{1}{\Delta_x} < 2u_o$, então o sinal original não poderia ser recuperado devido à superposição no espectro periódico do sinal amostrado (aliasing). Portanto, quanto menor for o intervalo de amostragem, maior será o intervalo $\frac{1}{\Delta_x}$ de repetição. Idealmente $\frac{1}{\Delta_x} \geq 2u_o$ para haver a recuperação do sinal original (Teorema de Nyquist).

Observe também que é computacionalmente inviável trabalhar com $f_a(x)$ ilimitada. Sua limitação $f'_a(x)$ no espaço entre $[\frac{-M\Delta_x}{2}, \frac{M\Delta_x}{2}]$ é obtida pela multiplicação de $f_a(x)$ por uma função $g(x) = 1$, se $|x| \leq \frac{M\Delta_x}{2}$, e 0 no c.c.. Pelas Equações 3 e 10, isto equivale à convolução de $F_a(u)$ com $G(u) = M\Delta_x Sa(\pi M \Delta_x u)$ gerando $F'_a(u)$ contínuo e periódico. Da mesma forma, é computacionalmente inviável trabalhar com um espectro contínuo. O espectro $F'_a(u)$ deve então ser amostrado a intervalos $\Delta_u = \frac{1}{M\Delta_x}$ gerando um espectro discreto e periódico $I_p(u)$. Pelas Equações 5 e 9, esta amostragem faz com que a inversa de $I_p(u)$ seja um sinal discreto e periódico $I_p(x)$, com período $M\Delta_x$.

A transformada de Fourier discreta $\vec{I}(u)$ de um sinal $I(x)$ provém dos coeficientes da série de Fourier discreta $\vec{I}_p(u)$ da seqüência periódica e discreta $I_p(x)$,

$$\vec{I}_p(u) = \sum_{x=0}^{M-1} I_p(x) \exp^{\frac{-j2\pi ux}{M}} \tag{14}$$

$$\vec{I}(u) = \begin{cases} \vec{I}_p(u), & u = 0, 1, \ldots, M-1 \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases} \tag{15}$$

$$I_p(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} \vec{I}_p(u) \exp^{\frac{j2\pi ux}{M}} \tag{16}$$

$$I(x) = \begin{cases} I_p(x), & x = 0, 1, \ldots, M-1 \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases} \tag{17}$$

onde $x = 0\Delta_x, 1\Delta_x, \ldots, (M-1)\Delta_x$ no espaço e $u = 0\Delta_u, 1\Delta_u, \ldots, (M-1)\Delta_u$ na freqüência são representados de forma adimensional como $x = 0, 1, \ldots, M-1$ e $u = 0, 1, \ldots, M-1$. No caso de uma imagem $\hat{I} = (D_I, I)$ com $M \times N$ pixels teremos:

$$\vec{I}_p(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I_p(x,y) \exp^{\left[-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right]} \tag{18}$$

$$\vec{I}(u,v) = \begin{cases} \vec{I}_p(u,v), & u = 0, 1, \ldots, M-1 \text{ e } v = 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases} \tag{19}$$

$$I_p(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \vec{I}_p(u,v) \exp^{\left[j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right]} \tag{20}$$

$$I(x,y) = \begin{cases} I_p(x,y), & x = 0, 1, \ldots, M-1 \text{ e } y = 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0, & \text{no c.c.} \end{cases} \tag{21}$$

Note que a imagem e a transformada de Fourier discreta iniciam em $(0,0)$ e vão até $(M-1, N-1)$. Portanto, a visualização do espectro no centro da imagem requer uma translação de $(-M/2, -N/2)$, e no caso da magnitude, temos ainda uma transformação radiométrica logaritmica como descrito na aula 6.

As freqüências digitais $\Omega_x = 2\pi u$ e $\Omega_y = 2\pi v$ em radianos por unidade de comprimento também são representadas como $\omega_x = \Omega_x \Delta_x$ e $\omega_y = \Omega_y \Delta_y$ em radianos. Neste caso, $u = \frac{1}{\Delta_x}$ e $v = \frac{1}{\Delta_y}$ equivalem à $\omega_x = \omega_y = 2\pi$. As freqüências u e v contínuas são substituídas por u/M e v/N discretas, $u = 0, 1, \ldots, M-1$ e $v = 0, 1, \ldots, N-1$. Estando a magnitude do espectro centrada na imagem $I(u,v)$, com $M \times N$ pixels, temos que $\frac{M}{2} = \frac{N}{2} = \pi$ (i.e. a imagem do espectro varia de $-\pi$ a π).

2 Exercícios

1. Demonstre os pares de transformadas contínuas apresentados no início da aula (A demonstração da Equação 5 é mais complicada, use somatórias de cossenos). A demonstração da Equação 7 pode ser feita facilmente a partir da fórmula da inversa. Lembre-se que $\exp^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$.

2. Se $\Delta_x = 1mm$ e $\Delta_y = 2mm$ e uma imagem possui $M \times N$ pixels com $M = 256$ e $N = 256$, então quais as freqüências u e v contínuas para $u = v = 128$ discretos?