MC102 – Aula 28
Recursão II

Instituto de Computação – Unicamp

8 de Junho de 2015

Roteiro

Recursão - Relembrando

- Definições recursivas de funções são baseadas no *princípio matemático da indução* que vimos anteriormente.
- A idéia é que a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Definimos a solução para os casos básicos;
  - Definimos como resolver o problema geral utilizando soluções do mesmo problema só que para casos menores.

Cálculo de Potências

Suponha que queiramos calcular x^n para n inteiro positivo. Como calcular de forma recursiva?
x^n é:

- 1 se $n = 0$.
- xx^{n-1} caso contrário.

Cálculo de Potências

```
long pot(long x, long n){
  if(n == 0)
    return 1;
  else
    return x*pot(x,n-1);
}
```

Cálculo de Potências

Neste caso a solução iterativa é mais eficiente.

```
long pot(long x, long n){
    long p = 1, i;
    for( i=1; i<=n; i++)
       p = p * x;
    return p;
}
```

- O laço é executado n vezes.
- Na solução recursiva são feitas n chamadas, mas tem-se o custo adicional para criação/remoção de variáveis locais na pilha.

Cálculo de Potências

Mas e se definirmos a potência de forma diferente:
x^n é:

- Caso básico:
  - Se $n = 0$ então $x^n = 1$.
- Caso Geral:
  - Se $n > 0$ e é par, então $x^n = (x^{n/2})^2$.
  - Se $n > 0$ e é ímpar, então $x^n = x(x^{(n-1)/2})^2$.

Note como no caso geral definimos a solução do caso maior em termos de casos menores.

Cálculo de Potências

Este algoritmo é mais eficiente do que o iterativo. Por que? Quantas chamadas recursivas o algoritmo pode fazer?

```
long pot(long x, long n){
    double aux;
    if(n == 0)
       return 1;

    else if(n%2 == 0){ //se n é par
      aux = pot(x, n/2);
      return aux * aux;
    }

    else{ //se n é impar
      aux = pot(x, (n-1)/2);
      return x*aux*aux;
    }
}
```

Cálculo de Potências

- No algoritmo anterior, a cada chamada recursiva o valor de n é dividido por 2. Ou seja, a cada chamada recursiva, o valor de n decai para pelo menos a metade.
- Usando divisões inteiras faremos no máximo $\lceil(\log_2 n)\rceil + 1$ chamadas recursivas.
- Enquanto isso, o algoritmo iterativo executa o laço n vezes.

Recursão com várias chamadas

- Não há necessidade da função recursiva ter apenas uma chamada para si própria.
- A função pode fazer várias chamadas para si própria.
- A função pode ainda fazer chamadas recursivas indiretas. Neste caso a função 1, por exemplo, chama uma outra função 2 que por sua vez chama a função 1.

Soma de um vetor

- Dado um vetor, vamos definir $S(i, n)$ como a soma de n elementos a partir da posição i.
- Com isso temos a seguinte definição recursiva para a soma dos elementos de um vetor:
  - Se $n = 1$ então $S(i, n) = v[i]$.
  - Se $n > 1$ então $S(i, n) = S(i, \lceil n/2 \rceil) + S(i + \lceil n/2 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor)$.
- Observações
  - $n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor$.
  - Dada uma posição i e quantidade $x = \lceil n/2 \rceil$ de elementos incluindo x, a próxima posição a ser considerada será $(i + x)$.
- Para computarmos a soma de todos os elementos de um vetor com n elementos, devemos calcular $S(0, n)$.

Soma de um vetor

O código recursivo segue abaixo. Basta implementarmos funções para calcular o teto e o chão da divisão de dois números.

```
int soma(int v[], int i, int n){
  if(n == 1)
    return v[i];
  else{
    return soma(v, i, teto(n,2)) +
      soma(v, i+teto(n,2), chao(n,2));
  }
}
```

Soma de um vetor

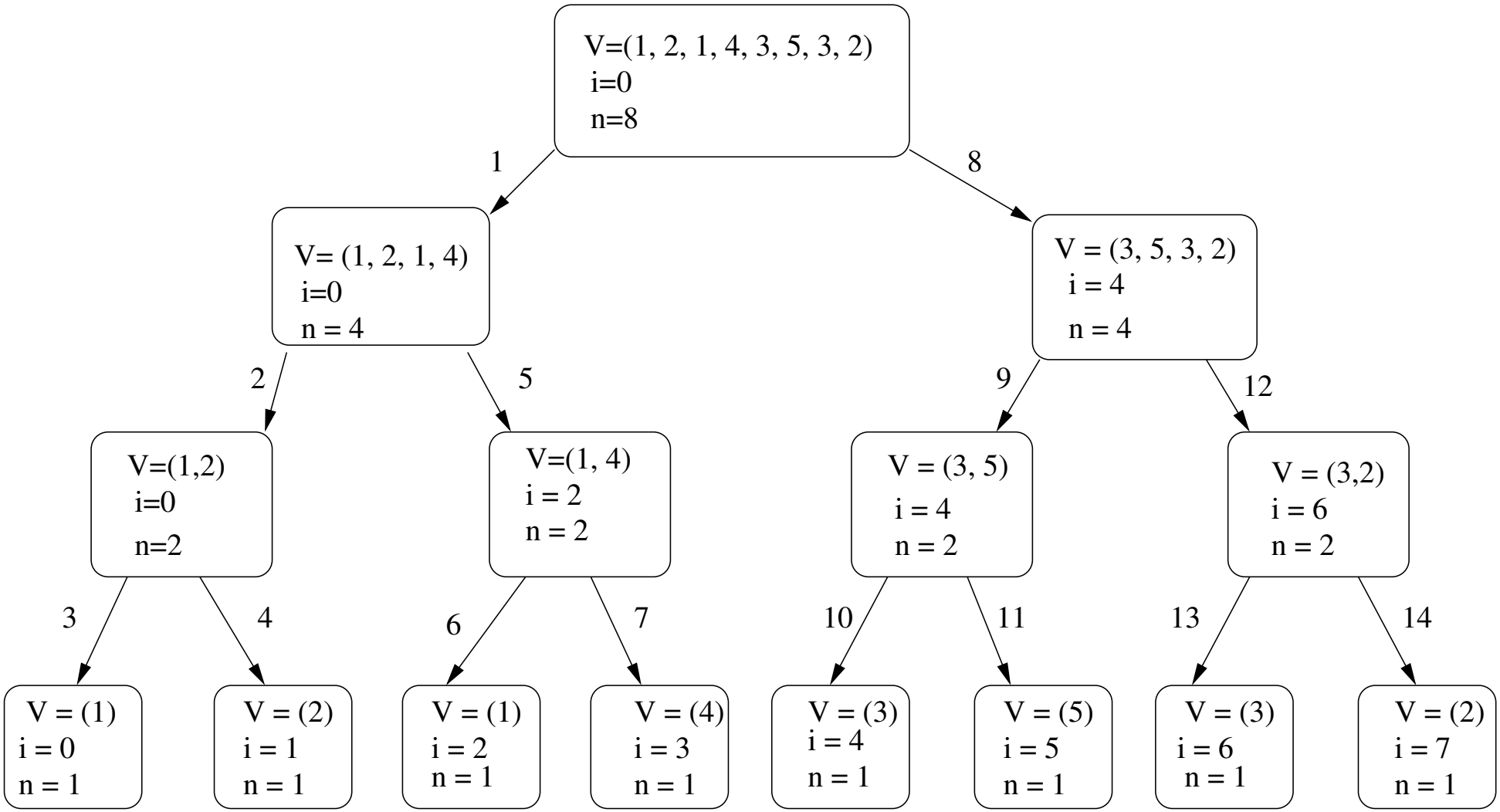
```
int teto(int numerador, int denominador){
  if(numerador % denominador == 0) //se divisão for inteira
    return (numerador/denominador);
  else
    return (numerador/denominador + 1);
}


int chao(int numerador, int denominador){
    return (numerador/denominador);
}
```

Soma de um vetor

- Abaixo temos um exemplo de execução da função para o vetor v=[1, 2, 1, 4, 3, 5, 3, 2].
- Há uma indicação da ordem em que ocorrem as sucessivas chamadas recursivas.
- Em cada balão é apresentado apenas a parte do vetor que está sendo considerada pela função naquele momento.
- A chamada da função deve ser: **somar(v, 0, 8)**.

Soma de um vetor



Recursão e Backtracking

- Muitos problemas podem ser resolvidos enumerando-se de forma sistemática todas as possibilidades de arranjos que formam uma solução para um problema.
- Vimos em aulas anteriores o seguinte exemplo: Determinar todas as soluções inteiras de um sistema linear como:

$$x_1 + x_2 + x_3 = C$$

com $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $C \geq 0$ e todos inteiros.

```
Para cada possível valor de x1 entre 0 e C
    Para cada possível valor de x2 entre 0 e C-x1
                Faça  x3 = C - (x1 + x2)
                Imprima solução x1 + x2 + x3 = C
```

Recursão e Backtracking

Abaixo temos o código de uma solução para o problema com $n = 3$ variáveis e C passado como parâmetro.

```
void solution(int C){
  int x1, x2, x3;

  for(x1=0; x1 <= C; x1++){
    for(x2=0; x2 <= C-x1; x2++){
      x3 = C -x1 -x2;
      printf("%d + %d + %d = %d\n", x1, x2, x3, C);
    }
  }
}
```

Recursão e Backtracking

Como resolver este problema para o caso geral, onde n e C são parâmetros?

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = C$$

- A princípio deveríamos ter $n - 1$ laços encaixados.
- Mas não sabemos o valor de n! Só saberemos durante a execução do programa.

Recursão e Backtracking

- A técnica de recursão pode nos ajudar a lidar com este problema:
  - Construir uma função com um único laço e que recebe uma variável k como parâmetro.
  - A variável k indica que estamos setando os possíveis valores de x_k.
  - Para cada valor de x_k devemos setar o valor de x_{k+1} de forma recursiva!
  - Se $k == n$ basta setar o valor da última variável.

Recursão e Backtracking

```
função solution(n, C, k){
  Se k == n Então
     x_n = C - x_1 - ... - x_{n-1}
     Imprima solução
  Senão
     Para cada valor de x_k entre 0 e (C - x_1 - ... - x_{k-1}) faça
        solution(n, C, k+1)
}
```

Recursão e Backtracking

- Em C teremos uma função com o seguinte protótipo:
  `void solution(int n, int C, int k, int R, int x[])`
- A variável R terá o valor restante de C para uma chamada recursiva qualquer, ou seja, $R = C - x_1 - \ldots - x_{k-1}$.
- O vetor x corresponde aos valores das variáveis.
  - Lembre-se que em C o vetor começa na posição 0, por isso as variáveis serão $x[0], \ldots, x[n-1]$.

Recursão e Backtracking

- Primeiramente temos o caso de parada (quando $k == n - 1$):

```
void solution(int n, int C, int k, int R, int x[]){
  if(k == n-1){
    int i;
    //imprimindo a solução
    for(i=0; i<= n-2; i++){
      printf("%d + ", x[i]);
    }
    printf("%d = %d\n", R, C); //R é o valor de x[n-1]
    return;
  }
  .
  .
  .
}
```

Recursão e Backtracking

- A função completa é:

```
void solution(int n, int C, int k, int R, int x[]){
  if(k == n-1){
    int i;
    for(i=0; i<= n-2; i++){
      printf("%d + ", x[i]);
    }
    printf("%d = %d\n", R, C);
    return;
  }

  for(x[k]=0; x[k]<=R; x[k]++){
    solution(n, C, k+1, R-x[k], x);
  }
}
```

A chamada inicial da função deve ter $k = 0$.

Recursão e Backtracking

```
int main(int argc, char *argv[]){
  if(argc != 3){
    printf("Execute o programa informando n (numero de variaveis) e C (constante in
    return 0;
  }
  int n = atoi(argv[1]);
  int C = atoi(argv[2]);
  int x[n];
  solution(n, C, 0, C, x);
}

void solution(int n, int C, int k, int R, int x[]){
  if(k == n-1){
    int i;
    for(i=0; i<= n-2; i++){
      printf("%d + ", x[i]);
    }
    printf("%d = %d\n", R, C);
    return;
  }
  for(x[k]=0; x[k]<=R; x[k]++){
    solution(n, C, k+1, R-x[k], x);
  }
}
```

Exercício

- Defina de forma recursiva a busca binária.
- Escreva um algoritmo recursivo para a busca binária.

Exercício

- Escreva um programa que lê uma string do teclado e então imprime todas as permutações desta palavra. Se por exemplo for digitado "abca" o seu programa deveria imprimir: aabc aacb abac abca acab acba baac baca bcaa caab caba cbaa