Ordenação – InsertionSort e Busca em Vetores

Instituto de Computação – Unicamp

24 de Abril de 2015

Roteiro

Ordenação

- Continuamos com o estudo de algoritmos para o problema de ordenação:

Dado uma coleção de elementos com uma relação de ordem entre si, devemos gerar uma saída com os elementos ordenados.

- Novamente usaremos um vetor de inteiros como exemplo de coleção a ser ordenada.

Insertion-Sort

- Seja **vet** um vetor contendo números inteiros, que devemos deixar ordenado.
- A idéia do algoritmo é a seguinte:
  - A cada passo, uma porção de 0 até $i - 1$ do vetor já está ordenada.
  - Devemos inserir o item da posição i na posição correta para deixar o vetor ordenado até a posição i.
  - No passo seguinte consideramos que o vetor está ordenado até i.

Insertion-Sort

Exemplo: (5,3,2,1,90,6).
O valor sublinhado representa onde está o índice i

$(5, \underline{3}, 2, 1, 90, 6)$: vetor ordenado de $0 - 0$.
$(3, 5, \underline{2}, 1, 90, 6)$: vetor ordenado de $0 - 1$.
$(2, 3, 5, \underline{1}, 90, 6)$: vetor ordenado de $0 - 2$.
$(1, 2, 3, 5, \underline{90}, 6)$: vetor ordenado de $0 - 3$.
$(1, 2, 3, 5, 90, \underline{6})$: vetor ordenado de $0 - 4$.
$(1, 2, 3, 5, 6, 90)$: vetor ordenado de $0 - 5$.

Insertion-Sort

- Vamos supor que o vetor está ordenado de 0 até $i - 1$.
- Vamos inserir o elemento da posição i no lugar correto.

```
j=i;
while(j>0){  //neste laço vamos trocando v[i] com posições
             //anteriores até acharmos a posição correta de v[i]
  if(vet[j] < vet[j-1]){
     aux = vet[j-1];
     vet[j-1] = vet[j];
     vet[j] = aux;
     j--;
  }else{
      break;
  }
}
```

Insertion-Sort

- Vamos apresentar uma forma alternativa de fazer a mesma coisa do slide passado.
- Vamos supor que o vetor está ordenado de 0 até $i - 1$.
- Vamos inserir o elemento da posição i no lugar correto.

```
aux = vet[i];  //inserir aux na posição correta
j = i - 1; //analisar elementos das posições j anteriores

while( ( j >=0 ) && ( vet[j] > aux) ){
    vet[ j+1 ] = vet[ j ];    // enquanto vet[j] > aux empurra
     j --;                    // vet[j] para frente
}

//Quando terminar o laço:
//   OU j == -1, significando que você empurrou v[0] para frente
//   OU vet[j] <= aux.
// De qualquer forma (j+1) é a posição correta para v[i]
 vet[ j+1 ] = aux;
 }
```

Exemplo $(1, 3, 5, 10, 20, 2^*, 4)$ com $i = 5$.
$(1, 3, 5, 10, \underline{20}, 2, 4)$: $aux = 2; j = 4;$
$(1, 3, 5, \underline{10}, 20, 20, 4)$: $aux = 2; j = 3;$
$(1, 3, \underline{5}, 10, 10, 20, 4)$: $aux = 2; j = 2;$
$(1, \underline{3}, 5, 5, 10, 20, 4)$: $aux = 2; j = 1;$
$(\underline{1}, 3, 3, 5, 10, 20, 4)$: $aux = 2; j = 0;$
Aqui temos que $vet[j] < aux$ logo fazemos $vet[j + 1] = aux$
$(1, 2, 3, 5, 10, 20, 4)$: $aux = 2; j = 0;$

```
void insertionSort(int vet[], int tam){
   int i,j, aux;

   for(i=1; i<tam; i++){

      aux = vet[i];
      j=i-1;

      while( (j>=0) && (vet[j] > aux)  ){
         vet[j+1] = vet[j];
         j--;
      }
      vet[j+1] = aux;
   }
}
```

O Problema da Busca

- Vamos estudar alguns algoritmos para o seguinte problema:

Temos uma coleção de elementos, onde cada elemento possui um identificador/chave único, e recebemos uma chave para busca. Devemos encontrar o elemento da coleção que possui a mesma chave ou identificar que não existe nenhum elemento com a chave dada.

- Nos nossos exemplos usaremos um vetor de inteiros como a coleção.
  - O valor da chave será o próprio valor de cada número.
- Apesar de usarmos inteiros, os algoritmos servem para buscar elementos em qualquer coleção de elementos que possuam chaves que possam ser comparadas.

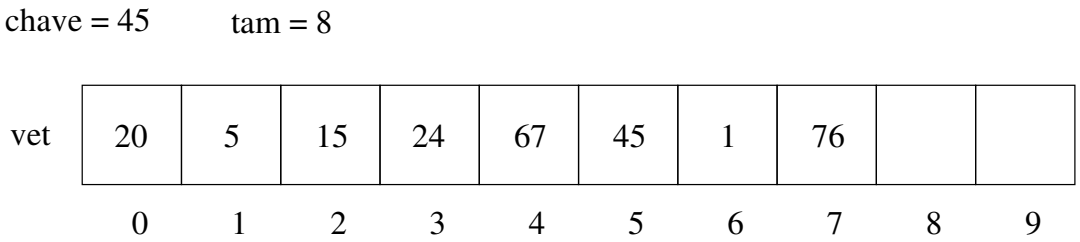
O Problema da Busca

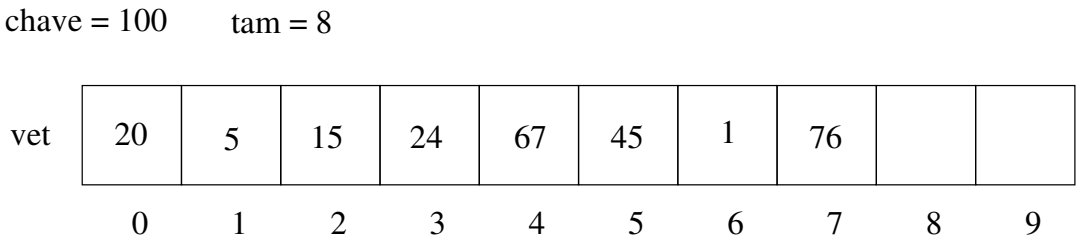
- O problema da busca é um dos mais básicos em Computação e também possui diversas aplicações.
  - Suponha que temos um cadastro com registros de motoristas.
  - Um vetor de registros é usado para armazenar as informações dos motoristas. Podemos usar como chave o número da carteira de motorista, ou o RG, ou o CPF.
- Veremos algoritmos simples para realizar a busca assumindo que dados estão em um vetor.
- Em cursos mais avançados são estudados outros algoritmos e estruturas (que não um vetor) para armazenar e buscar elementos.

O Problema da Busca

- Nos nossos exemplos vamos criar a função:
  - **int busca(int vet[], int tam, int chave)**, que recebe um vetor com um determinado tamanho, e uma chave para busca.
  - A função deve retornar o índice do vetor que contém a chave ou -1 caso a chave não esteja no vetor.

O Problema da Busca





No exemplo mais acima, a função deve retornar 5, enquanto no exemplo mais abaixo a função deve retornar -1.

Busca Sequencial

- A busca sequencial é o algoritmo mais simples de busca:
  - Percorra todo o vetor comparando a chave com o valor de cada posição.
  - Se for igual para alguma posição, então devolva esta posição.
  - Se o vetor todo foi percorrido então devolva -1.

Busca Sequencial

```
int buscaSequencial(int vet[], int tam, int chave){
  int i;
  for(i=0; i<tam; i++){
    if(vet[i] == chave)
      return i;
  }
  return -1;
}
```

Busca Sequencial

```
#include <stdio.h>
int buscaSequencial(int vet[], int tam, int chave);
int main(){
  int pos, vet[] = {20, 5, 15, 24, 67, 45, 1, 76, -1, -1}; //-1 indica
                                                            //posição não usada
  pos = buscaSequencial(vet, 8, 45);
  if(pos != -1)
    printf("A posicao da chave 45 no vetor é: %d\n", pos);
  else
    printf("A chave 45 não está no vetor! \n");

  pos = buscaSequencial(vet, 8, 100);
  if(pos != -1)
    printf("A posicao da chave 100 no vetor é: %d\n", pos);
  else
    printf("A chave 100 não está no vetor! \n");
}

int buscaSequencial(int vet[], int tam, int chave){
  int i;
  for(i=0; i<tam; i++){
    if(vet[i] == chave)
      return i;
  }
  return -1;
}
```

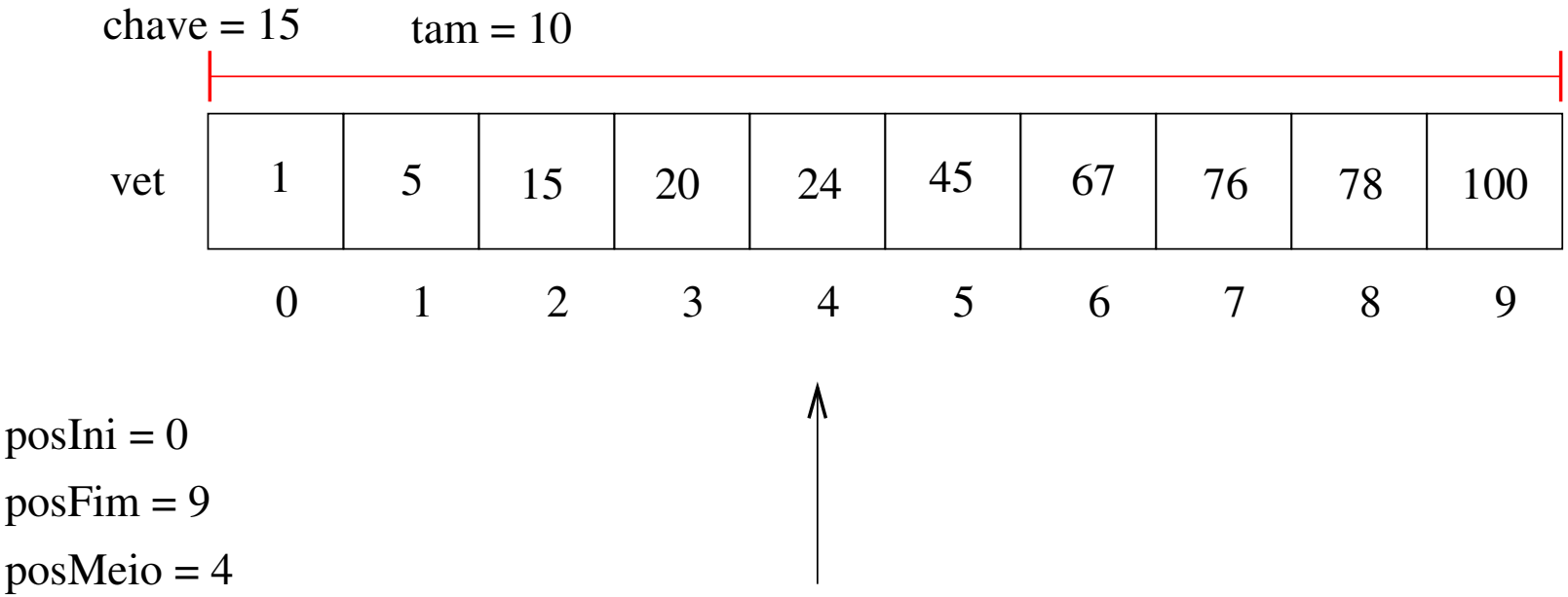
Busca Binária

- A busca binária é um algoritmo um pouco mais sofisticado.
- É mais eficiente, mas requer que o vetor esteja ordenado pelos valores da chave de busca.
- A idéia do algoritmo é a seguinte (assuma que o vetor está ordenado):
  - Verifique se a chave de busca é igual ao valor da posição do meio do vetor.
  - Caso seja igual, devolva esta posição.
  - Caso o valor desta posição seja maior, então repita o processo mas considere que o vetor tem metade do tamanho, indo até posição anterior a do meio.
  - Caso o valor desta posição seja menor, então repita o processo mas considere que o vetor tem metade do tamanho e inicia na posição seguinte a do meio.

Busca Binária

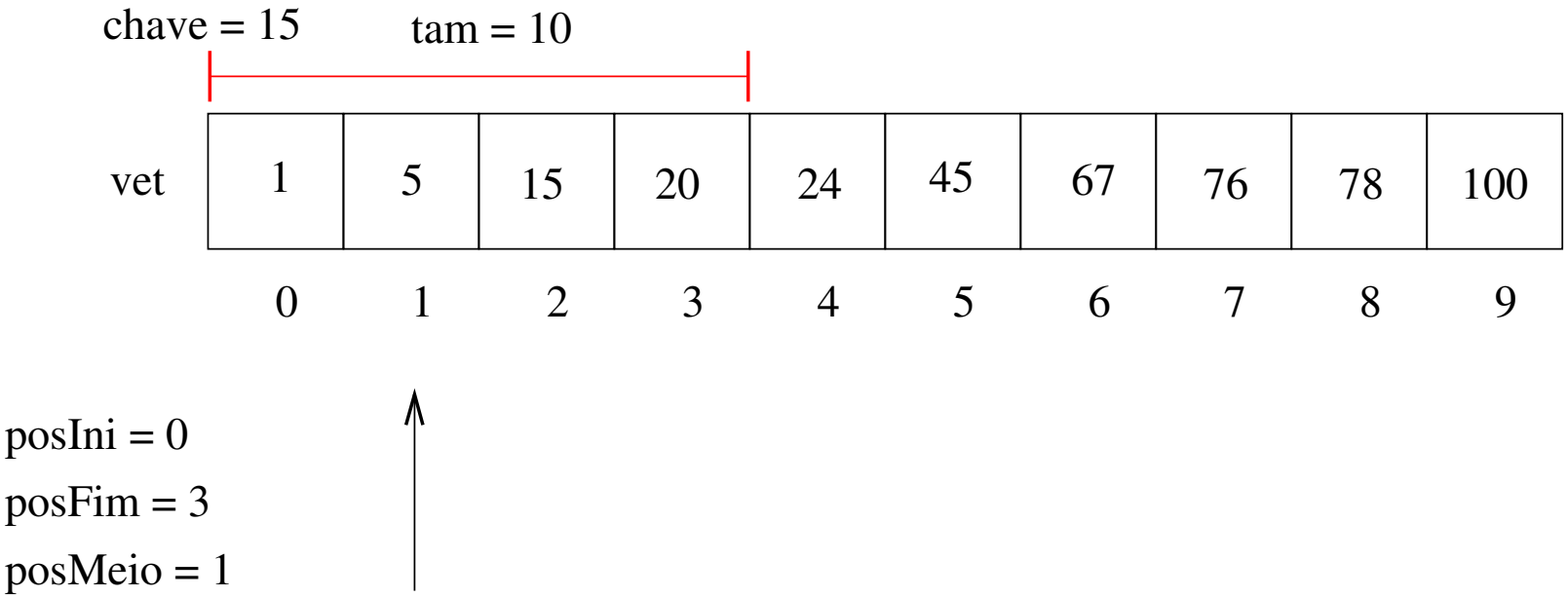
```
//vetor começa em posIni e termina em posFim
posIni = 0
posFim = tam-1

Repita enquanto tamanho do vetor considerado for >= 1
        posMeio = (posIni + posFim)/2

        Se vet[posMeio] == chave Então
                devolva posMeio

        Se vet[posMeio] > chave Então
                posFim = posMeio - 1

        Se vet[posMeio] < chave Então
                posIni = posMeio + 1
```

Busca Binária



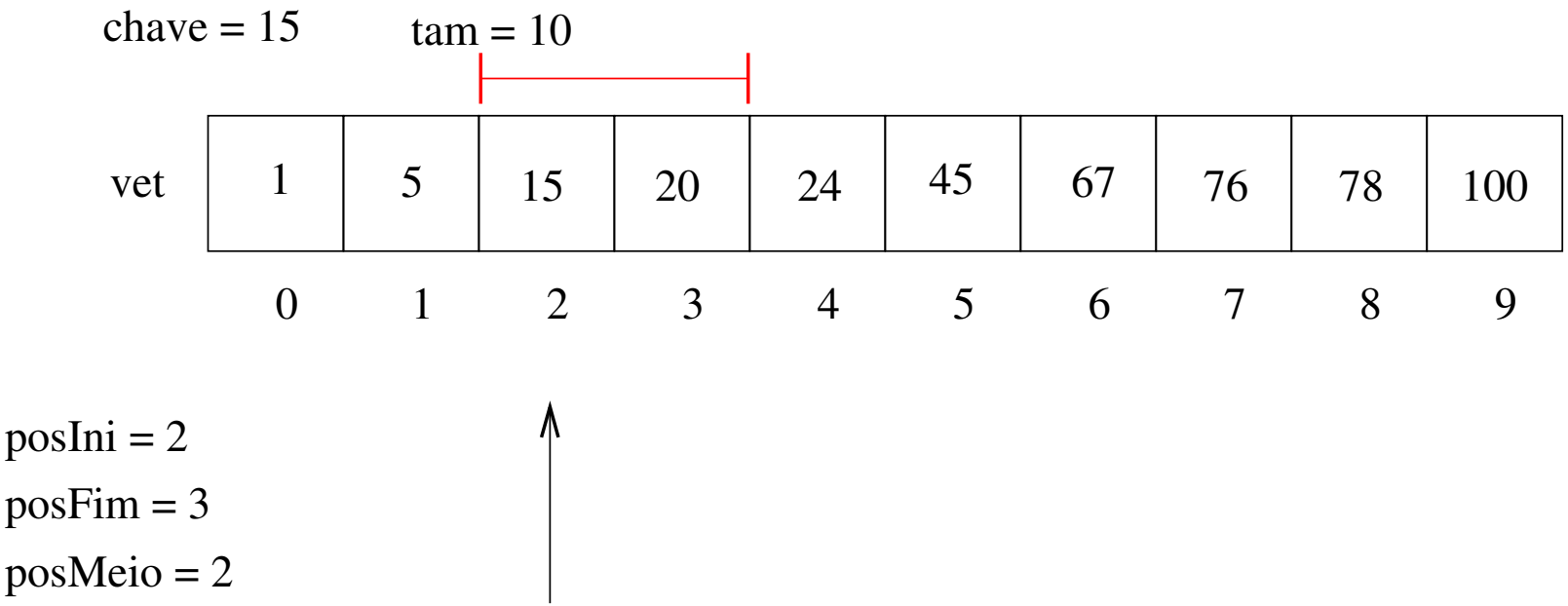
Como o valor da posição do meio é maior que a chave, atualizamos **posFim** do vetor considerado.

Busca Binária



Como o valor da posição do meio é menor que a chave, atualizamos **posIni** do vetor considerado.

Busca Binária



Finalmente encontramos a chave e podemos devolver sua posição 2.

Busca Binária

```
int buscaBinaria(int vet[], int tam, int chave){
  int posIni=0, posFim=tam-1, posMeio;

  while(posIni <= posFim){ //enquanto o vetor tiver pelo menos 1 elemento
    posMeio = (posIni+posFim)/2;

    if(vet[posMeio] == chave)
      return posMeio;
    else if(vet[posMeio] > chave)
      posFim = posMeio - 1;
    else
      posIni = posMeio + 1;
  }

  return -1;
}
```

Busca Binária

```
int main(){
  int vet[] = {20, 5, 15, 24, 67, 45, 1, 76, 78, 100};
  int pos, i;

  //antes de usar a busca devemos ordenar o vetor
  insertionSort(vet,10);
  printf("Vetor Ordenado:");
  for(i =0; i<10; i++){
    printf("%d, ", vet[i]);
  }
  printf("\n");
  pos = buscaBinaria(vet, 10, 15);
  if(pos != -1)
    printf("A posicao da chave 15 no vetor é: %d\n", pos);
  else
    printf("A chave 15 não está no vetor! \n");


}
```

Eficiência dos Algoritmos

Podemos medir a eficiência de qualquer algoritmo analisando a quantidade de recursos (tempo, memória, banda de rede, etc.) que o algoritmo usa para resolver o problema para o qual foi proposto.

- A forma mais simples é medir a eficiência em relação ao tempo. Para isso, analisamos quantas instruções um algoritmo usa para resolver o problema.
- Podemos fazer uma análise simplificada dos algoritmos de busca analisando a quantidade de vezes que os algoritmos **acessam** uma posição do vetor.

Eficiência dos Algoritmos

No caso da busca sequencial existem três possibilidades:

- Na melhor das hipóteses a chave de busca estará na posição 0. Portanto teremos um único acesso em **vet[0]**.
- Na pior das hipóteses, a chave é o último elemento ou não pertence ao vetor, e portanto acessaremos todas as *tam* posições do vetor.
- É possível mostrar que se uma chave qualquer pode ser requisitada com a mesma probabilidade, então o número de acessos será

$$(\text{tam} + 1)/2$$

na média.

Eficiência dos Algoritmos

No caso da busca binária temos as três possibilidades:

- Na melhor das hipóteses a chave de busca estará na posição do meio. Portanto teremos um único acesso.
- Na pior das hipóteses, teremos $(\log \text{tam})$ acessos.
  - Para ver isso note que a cada verificação de uma posição do vetor, o tamanho do vetor considerado é dividido pela metade. No pior caso repetimos a busca até o vetor considerado ter tamanho 1. Se você pensar um pouco, o número de acessos x pode ser encontrado resolvendo-se a equação:

    $$\frac{\text{tam}}{2^x} = 1$$

    cuja solução é $x = (\log_2 \text{tam})$.
- É possível mostrar que se uma chave qualquer pode ser requisitada com a mesma probabilidade, então o número de acessos será

  $$(\log_2 \text{tam}) - 1$$

  na média.

Eficiência dos Algoritmos

Para se ter uma idéia da diferença de eficiência dos dois, considere que temos um cadastro com 10^6 (um milhão) de itens.

- Com a busca sequencial, a procura de um item qualquer gastará na média

$$(10^6 + 1)/2 \approx 500000 \text{ acessos.}$$

- Com a busca binária teremos

$$(\log_2 10^6) - 1 \approx 20 \text{ acessos.}$$

Eficiência dos Algoritmos

Mas uma ressalve deve ser feita: Para utilizar a busca binária, o vetor precisa estar ordenado!

- Se você tiver um cadastro onde vários itens são removidos e inseridos com frequência, e a busca deve ser feita intercalado com estas operações, então a busca binária pode não ser a melhor opção, já que você precisará ficar mantendo o vetor ordenado.
- Caso o número de buscas feitas seja muito maior, quando comparado com outras operações, então a busca binária é uma boa opção.

Exercícios

- Altere o código do algoritmo insertionSort para que este ordene um vetor de inteiros em ordem decrescente.

Exercícios

- Refaça as funções de busca sequencial e busca binária assumindo que o vetor possui chaves que podem aparecer repetidas. Neste caso, você deve retornar em um outro vetor todas as posições onde a chave foi encontrada.
  Protótipo: **int busca(int vet[], int tam, int chave, int posicoes[])**
- Você deve devolver em **posicoes[]** as posições de **vet** que possuem a **chave**, e o retorno da função é o número de ocorrências da chave.
  - **OBS:** Na chamada desta função, o vetor **posições** deve ter espaço suficiente (tam) para guardar todas as possíveis ocorrências.